数学学习笔记

陈礼元

28,March,2020

写在前面　本文是我在学习数学的时候的部分笔记."I write not because I know something but to learn something."

Writing in the front　This paper is a study note of math and a reference to some exercises.

Contents

1 命题逻辑和谓词

1.1 命题逻辑

Definition. 命题 *(proposition)p* 是一个变量，它只能取值为真 *true(T)* 或假 *(false(F))*，不能为其他值。

从命题逻辑的角度看，这就是命题。特别是，命题逻辑的任务不是决定“有外星生命”这一形式的复杂陈述是否属实。命题逻辑已经处理了完整的命题，它只是假设这不是真就是假。命题逻辑的任务也不是判断“冬天外面比屋里冷”这类陈述是不是命题 (即它是否具有真或假的性质)。

在这种特殊情况下，该语句看起来相当无意义。

Definition. 总是为真的命题叫做 *重言式 (tautology)* 或称永真式, 总是为假的命题叫做 *矛盾式 (contradiction)* 或称永假式.

它可以使用逻辑运算符从给定的命题构造新的命题。最简单的逻辑运算符是一元 *(unary)* 运算符，它接受一个命题，然后返回另一个命题。总共有四个一元运算符，它们的不同之处在于所得命题 p 的真值，通常取决于的真值。我们可以将它们表示为下表:

p	$\neg p$	$\mathrm{id}(p)$	$\top p$	$\perp p$
F	T	F	T	F
T	F	T	T	F

其中 $\neg$ 是否定 *(negation)* 算符，id 是恒等算符，$\top$ 是重言 (永真) 算符，$\perp$ 是矛盾 *(contradiction)* 算符。这些显然就是一元运算符的所有可能的形式。下一步是考虑二进制运算符，即接受两个命题并返回一个新命题的运算符。两个命题的真值有四种组合，由于二元运算符将两个可能的真值中的一个赋给每个命题，我们总共有 16 个二元运算符。运算符 $\wedge, \vee$ 和 $\veebar$,、被分别称为与 *(and)*, 或 *(or)* and 异或 *(exclusive or)* 对您来说应该已经很熟悉了。

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$
F	F	F	F	F
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	F

有一个二元运算符，蕴含 *(implication)* 运算符 $\Rightarrow$，它有时不太容易理解，除非你已经非常了解这些东西。它的有用性与等价 *(equivalence)* 的运算符 $\Leftrightarrow$ 结合在一起。我们有：

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

虽然一开始就告诉你在每一个 p 是假的时候命题 $p \Rightarrow q$ 都是真的这一事实, 可能会令人惊讶，但这只是蕴涵算符的定义，它是“前提是假的”原理的表达，也就是说，从一个假的假设出发，任何事情都是真的, 由此而来的。当然，你可能想知道我们到底为什么要用这种方式定义蕴涵运算符。此问题的答案隐藏在以下结果中

Theorem 1.1. *令 p, q 为命题. 于是 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$.*

Proof. 我们简单地构造了如下的真值表 $p \Rightarrow q$ 和 $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

$p \Rightarrow q$ 和 $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ 这两列是一致的所以我们完成了证明。 □

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	T	T

Remark 1.2. 在一个公式中, 命题的运算符优先级降序排列如下:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow .$$

举个例子, $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ 可以明确地写为 $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Remark 1.3. 所有高阶运算符 $\heartsuit(p_1, \ldots, p_N)$ 可以从由已定义的单一的二元运算符构造:

p	q	$p \uparrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

这被称为 *与非 (nand)* 算符并且, 事实上, 我们有 $(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$.

1.2 谓词逻辑

Definition. 一个*谓词 (predicate)* (非正式地) 是一些变量或变量的命题值函数。特别地，两个变量的谓词称为*关系 (relation)*。

例如，$P(x)$ 是关于变量表达式的每个 x 的选择的命题，其真值取决于 x 的选择。类似地，对于任意选取的 x 和 y，谓词 $Q(x, y)$ 都是一个命题，其真值取决于 x 和 y。

就像命题逻辑一样，谓词逻辑的任务不是检查谓词是如何从它们所依赖的变量构建的。为了做到这一点，人们需要一些进一步的语言来建立规则，以将变量 x 和 y 组合成谓词。此外，您可能希望指定 x 和 y 来自哪个"集合"，而不是让它完全不受约束，只考虑 x 和 y 和形式化变量，不附加任何额外的条件。

这可能看起来有点奇怪，因为从小学开始，人们就习惯于一看到像 $P(x)$ 这样的表达式就会问"x"是从哪里来的。然而，我们在这里避免这样做是至关重要的，因为我们只想在稍后使用命题逻辑和谓词逻辑的语言来定义集合的概念。与命题一样，我们可以使用上一节中定义的运算符从给定的谓词构造新的谓词。例如，我们可能有：

$$Q(x, y, z) :\Leftrightarrow P(x) \wedge R(y, z),$$

其中符号 $:\Leftrightarrow$ 表示"定义为等同于"。更有趣的是，我们可以通过使用*量词 (quantifiers)* 从一个给定的谓词构造一个新的命题。

Definition. 设 $P(x)$ 为一个谓词. 于是我们有:

$$\forall\, x : P(x),$$

是一个命题，我们读作"对于所有的 x，x 的 P(是真的)"，它被定义为真，如果 $P(x)$ 独立于 x 的选择为真，否则为假。符号 $\forall$ 称为*全称量词 (universal quantifier)*

Definition. 设 $P(x)$ 为一个谓词. 于是我们定义:

$$\exists\, x : P(x) :\Leftrightarrow \neg(\forall\, x : \neg P(x)).$$

命题 $\exists\, x : P(x)$ 被读作"存在 (至少一个) x 使得 x 的 P (是真的)", 于是符号 $\exists$ 被称为 *存在量词 (existential quantifier)*.

以下结果是这些定义的直接结果

Corollary 1.4. *设 $P(x)$ 为一个命题. 于是:*

$$\forall x : P(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x : \neg P(x)).$$

Remark 1.5. 可以定义多于一个变量的谓词的量化，为了做到这一点，人们可以在每一步对一个变量的谓词进行量化。

Example 1.6. 设 $P(x, y)$ 为一个谓词. 于是, 对于固定的 y, $P(x, y)$ 是一个变量的谓词，我们定义:

$$Q(y) :\Leftrightarrow \forall x : P(x, y).$$

因此，我们可能会有以下几种情况:

$$\exists y : \forall x : P(x, y) :\Leftrightarrow \exists y : Q(y).$$

其他量词组合的定义类似。

Remark 1.7. 量化的顺序很重要 (如果量词不都相同)。对于给定的谓词 $P(x, y)$，命题：

$$\exists y : \forall x : P(x, y) \quad \text{and} \quad \forall x : \exists y : P(x, y)$$

是不一定等价的.

Example 1.8. 考虑表示实数中存在加性逆元的命题。我们有

$$\forall x : \exists y : \; x + y = 0,$$

即, 对于每个 x 存在一个逆元 y 使得 $x + y = 0$ 成立. 对于 1 这个逆元是 -1, 对于 2 它是 -2 , 等等.

现在考虑通过交换前面命题中的量词获得的命题：

$$\exists y : \forall x : \; x + y = 0.$$

这个命题的意思是说，存在一个实数 y，不管 x 是什么，我们都有 $x + y = 0$。这显然是错误的，因为如果 $x + y = 0$, 对于一些 x 于是有 $(x + 1) + y \neq 0$, 因此相同的 y 不能对 x 和 $x + 1$ 成立, 更不用说每个 x .

请注意，命题 $\exists x : P(x)$ 的意思是“*至少存在一个 (at least one)*x 使得 $P(x)$ 为真的条件”。在数学中，我们常常证明“存在一个*唯一的 (a unique)*x，使得 $P(X)$ 成立”。因此，我们有以下定义

Definition. 设 $P(x)$ 为命题逻辑. 我们定义 *唯一存在量词 (unique existential quantifier)* $\exists!$ 由:

$$\exists!\, x : P(x) :\Leftrightarrow (\exists x : P(x)) \wedge \forall y : \forall z : (P(y) \wedge P(z) \Rightarrow y = z).$$

这个定义清楚地将存在条件和唯一性条件分开。一个简洁的等价定义是：

$$\exists!\, x : P(x) :\Leftrightarrow (\exists x : \forall y : P(y) \Leftrightarrow x = y)$$

1.3 公理系统和定理的证明

Definition. *公理系统 (axiomatic system)* 是命题 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 的有限序列，称为系统的*公理 (axioms)*。

Definition. 公理系统 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 中命题的*证明 (proof)* 是命题 $q_1, q_2, \ldots, q_M$ 的有限序列，使得对任意 $1 \leq j \leq M$ ，$q_M = p$ 满足下列条件之一：

(A) q_j 是公理列表的一个命题;

(T) q_j 是一个重言式;

(M) $\exists 1 \leq m, n < j : (q_m \wedge q_n \Rightarrow q_j)$ 是真的.

Remark 1.9. 如果 p 可以在公理系统 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 中证明，我们写道:

$$a_1, a_2, \ldots, a_N \vdash p$$

并且读作 "$a_1, a_2, \ldots, a_N$ 证明了 p".

Remark 1.10. 这个证据的定义允许很容易地识别证明。计算机可以方便地检查命题序列是否满足条件 (A)、(T) 和 (M)。要真正找到一个命题的证明就完全是另一回事了。

Remark 1.11. 显然，在公理系统的公理列表中出现的任何重言式都可以从列表中删除，而不会损害公理系统的威力。

公理系统的一个极端情况是命题逻辑。命题逻辑的公理系统是空序列。这意味着我们在命题逻辑中所能证明的都是重言式。

Definition. 一个公理系统 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 如果*存在* *(consistent)* 一个不能从公理证明的命题 q，则称它是一致的。用符号表示:

$$\exists\, q : \neg(a_1, a_2, \ldots, a_N \vdash q).$$

这个定义背后的理念如下。考虑一个包含相互矛盾的命题的公理系统:

$$a_1, \ldots, s, \ldots, \neg s, \ldots, a_N.$$

然后，给出 任何 *(any)* 命题 q，下面就是 q 在这个系统中的一个证明

$$s, \neg s, q.$$

事实上,s 和 $\neg s$ 是证明中的合法步骤,因为它们是公理。而且,$s \wedge \neg s$ 是矛盾的,因此 $(s \wedge \neg s) \Rightarrow q$ 是重言式。因此，q 由条件 (M) 导出。这表明，任何命题都可以在具有矛盾公理的系统中得到证明。换句话说，不能证明每个命题都是没有矛盾系统所拥有的性质，因此我们将一个一致性定义为具有这一性质的系统。走到这一步，我们现在可以陈述 (并证明) 一个令人印象深刻的定理。

Theorem 1.12. *命题逻辑是一致的.*

Proof. 足以表明在命题逻辑中存在一个无法证明的命题。命题逻辑以空序列为公理。因此，这里只有条件 (T) 和 (M) 是相关的。后者允许插入命题 q_j，使得 $(q_m \wedge q_n) \Rightarrow q_j$ 为真，其中 q_m 和 q_n 是证明序列中位于 q_j 之前的命题。然而，由于 (T) 只允许在证明序列中插入重言式，因此命题 q_m 和 q_n 必须是重言式。因此，要使 $(q_m \wedge q_n) \Rightarrow q_j$ 为真，q_j 也必须是重言式。因此，证明序列完全由重言式组成，因此只能证明重言式。现在让 q 为任何命题。那么 $q \wedge \neg q$ 是一个矛盾，因此不是重言式，因此无法证明。因此，命题逻辑是一致的 □

Remark 1.13. 虽然如何定义一致性是非常好和清楚的，但对于给定的公理系统来说，证明一致性是非常困难的，命题逻辑是一个很大的例外。

Theorem 1.14. *任何足以编码初等算术的公理系统要么是不一致的，要么包含一个不可判定* (undecidable) *的命题，即一个在系统内既可以证明也可以反证的命题。*

不可判定命题的一个例子是 Zermelo-Fraenkel 公理系统中的连续统假说。

2 集合与公理

2.1 罗素悖论

$R=\{x|\varphi(x)\}$:R 中包含不属于自已的集合.

2.2 一点数理逻辑

需要具备的逻辑学知识: 形式语言、逻辑符号、项、公式、自由变元、约束变元、语句 (不含自由变元).

推演 $\sum\vdash\varphi$($\sum$ 到 φ 的推演): 公式集合 $\sum$, 有穷公式序列 $\varphi_1,...\varphi_n$ 满足

$$((\varphi_i\in\sum)\vee(\varphi_i\ is\ an\ Axiom)\vee(\varphi_k=\varphi_j\to\varphi_i))\wedge(\varphi=\varphi_n). \tag{2.1}$$

证明 T 到 σ 的一个证明:T 为语句集,σ 为语句, 有 $T\vdash\sigma$ 成立.

理论 T 是一个理论,σ 为语句,, 对于 $\forall\sigma,T\vdash\sigma$ iff $\sigma\in T$, 则称 T 是一个对证明封闭的语句集.

公理 语句集 A 是理论 T 的一个公理:

$$(A\subseteq T)\wedge(\forall\sigma\in T\to A\vdash\sigma) \tag{2.2}$$

递归 可判定, 可计算的. 即任给一个语句, 我们可在有穷步内用完全机械的方法判定它是否属于 A

可公理化 若理论 T 的公理集合 A 是递归的.

集合论的语言 $\mathcal{L}_{set}$ 逻辑符号:$\neg,\vee,\wedge,\&$. 括号、二元谓词 $\in$.

2.3 公理

存在公理 0 存在一个集合,

$$\exists x(x=x) \tag{2.3}$$

外延公理 1 两个有相同元素的集合相等:

$$\forall X\forall Y\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)\to X=Y \tag{2.4}$$

空集 存在一个集合, 且根据外延公理它是唯一的,

$$\emptyset=\{x|x\neq x\} \tag{2.5}$$

Class:$\{u|\varphi(u)\}$, 不是集合的类: **真类**

交:$X\cap Y=\{u|u\in X\wedge u\in Y\}$, **差**: $X-Y=\{u|u\in X\wedge u\notin Y\}$

对任意集合 $X\neq\emptyset$, 它的**任意交**也是一个集合:

$$\bigcap X=\{u|\forall Y(Y\in X\to u\in Y)\}. \tag{2.6}$$

分离公理 2 令 $\varphi\langle u\rangle$ 为公式。对任意集合 X, 存在一个集合 $Y=\{u\in X|\varphi(u)\}$:

$$\forall X\exists Y\forall u\,(u\in Y\leftrightarrow u\in X\wedge\varphi(u)) \tag{2.7}$$

对集公理 3

$$\forall a\forall b\exists c\forall x(x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b) \tag{2.8}$$

并集公理 4 对于任意集合 X, 存在集合 Y 满足:$u\in Y$ 当且仅当存在 $z\in X$ 使得 $u\in z$:

$$\forall X\exists Y\forall u(u\in Y\leftrightarrow\exists(z\in X\wedge u\in z)) \tag{2.9}$$

幂集公理 5 对任意集合 X, 存在集合 Y 满足 $u\in Y$ 当且仅当 $u\subseteq X$:

$$\forall X\exists Y\forall u(u\in Y\leftrightarrow u\subseteq X). \tag{2.10}$$

后继 对于任意集合 x, 集合 $x \cup \{x\}$ 称为 x 的**后继**, 一般记为 $S(x)$ 或者 x^+。
无穷公理 6 存在集合 X, $\emptyset \in X$, 并且对任意 $x \in X$,x 的后继 $S(x)$ 也属于 X。

$$\exists X\left[\emptyset \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow S(x) \in X)\right]. \tag{2.11}$$

基础公理 7 对任意集合 $x \neq \emptyset$, 存在 $y \in x$ 使得 $Y \cap x = \emptyset$:

$$\forall x\left(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y\left(y \in x \wedge x \cap y \neq \emptyset\right)\right). \tag{2.12}$$

基础公理也称正则公理: 对于任意非空集合 x,x 总有一个元素 y 是关系 $\in$ 限制在 x 上的" 最小元"。也就是说,x 中再也没有元素属于 y 了。

有**唯一的** x 具有性质 $\psi(y)$ $\exists! x\psi(x)$ 表示 $\exists x\psi(x) \wedge \forall x \forall y\left(\psi(x) \wedge \psi(x) \rightarrow x = y\right)$.

替换公理模式 8 给定公式 $\psi(x,y)$, 并且对任意 x, 都有唯一的 y, 使得 $\psi(x,y)$ 成立。则对任意集合 A, 以下集合存在:

$$B = \left\{y | \exists x\left(x \in A \wedge \psi(x,y)\right)\right\}. \tag{2.13}$$

用公式表示就是

$$\forall A \forall x \in A \exists! y \psi(x,y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \psi(x,y). \tag{2.14}$$

选择公理 9 对于任意结合 $X \neq \emptyset$, 如果它满足
(1) $\emptyset \notin X$;
(2) X 中的元素是两两不相交的, 即, 如果$x, y \in X$并且$x \neq y$, 则$x \cap y = \emptyset$,
则存在集合S, 对任意$x \in X$, $S \cap x$是单点集, 即

$$\forall X\left[\emptyset \notin X \wedge \forall x \in X \forall y \in X\left(x \cap y = \emptyset\right) \rightarrow \exists S \forall x \in X \exists! y\left(S \cap x = \{y\}\right)\right]. \tag{2.15}$$

2.4 习题选答

1.4.5. 证明如果 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, 则

$$\bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}). \tag{2.16}$$

举例说明:
(1) 条件 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ 是必不可少的;
(2) $\subseteq$ 不能换成 $=$。

解: 先求自己的任意交: 设 $\bigcap \mathcal{F} = \left\{f | \forall F\left(F \in \mathcal{F} \rightarrow f \in F\right)\right\}, \bigcap \mathcal{G} = \left\{g | \forall G\left(g \in \mathcal{G} \rightarrow g \in G\right)\right\}$;
再求任意交的交: $\bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} = \left\{h | h \in F \wedge h \in G\right\}$.
而先找交:$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \left\{H | H \in \mathcal{F} \wedge H \in \mathcal{G}\right\}$,
再求交的任意交: $\bigcap(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \left\{h | \forall H\left(H \in (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) \rightarrow h \in H\right)\right\}, \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$.

1.4.9. 对集公理、并集公理和幂集公理都可替换为较弱的形式:
对任意 a 和 b, 存在一个集合 Y 满足 $a \in Y$ 并且 $b \in Y$。(**弱对集公理**)
对于任意集合 X, 存在集合 Y 满足如果存在 $z \in X$ 使得 $u \in z$, 则 $u \in Y$。(**弱并集公理**)
对任意集合 X, 存在集合 Y 满足如果 $u \subseteq X$, 则 $u \in Y$。(**弱幂集公理**)
用以上弱形式的公理证明对集、并集和幂集公理。[提示: 仍用分离公理模式。]

证明: 由分离公理模式, 令 $\varphi(x) := x \in Y \rightarrow \forall a \forall b \exists Y \forall x(x \in Y \rightarrow x = a \vee x = b)$ 即对集公理。
由分离公理模式, 令 $\varphi(u) := u \in Y \rightarrow \exists z \in X \wedge u \in z$, 结合弱并集公理, 即并集公理。
由分离公理模式, 令 $\varphi(u) := \forall u \subseteq X \rightarrow u \in Y$ 即幂集公理。

3 关系与函数、实数的构造

3.1 关系

有序对

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\} \tag{3.1}$$

卡氏积 令 X 和 Y 为集合, 则 X 和 Y 的卡氏积定义为:

$$X\times Y=\{(x,y)\,|x\in X\wedge y\in Y\}\,. \tag{3.2}$$

二元关系 一集合 R 称为 二元关系, 如果存在集合 X,Y, $R\subseteq X\times Y$。这样, 二元关系 R 的所有元素都是有序对, 即, 对任意 $z\in R$ 存在 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 满足 $z=(x,y)$.

令 R 为二元关系,

(1) R 的**定义域**: $dom(R)=\{x|\exists yR\,(x,y)\}$;

(2) R 的**值域**: $dom(R)=\{x|\exists yR\,(x,y)\}$;

(3) R 是 X **上的二元关系**: $R\subseteq X^2$.

定义

(1) 集合 X 在关系 R 下的**像**定义为:

$$R\,[X]=\{y\in \mathrm{ran}R|\exists x\in X\,(R\,(x,y))\}\,; \tag{3.3}$$

(2) 集合 Y 在关系 R 下的**逆像**定义为:

$$R^{-1}\,[Y]=\{x\in \mathrm{dom}R|\exists y\in X\,(R\,(x,y))\}\,; \tag{3.4}$$

(3) 二元关系 R 的**逆**定义为:

$$R^{-1}=\{(x,y)\,|\,(y,x)\in R\}\,; \tag{3.5}$$

(4) 二元关系 R 和 S 的复合定义为:

$$S\circ R=\{(x,z)\,|\exists y\,((x,y)\in R\wedge (y,z)\in S)\}\,. \tag{3.6}$$

n 个集合的卡氏积

$$X_1\times\cdots\times X_n=\{(x_1,\cdots,)\,|x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\}\,. \tag{3.7}$$

对于任意集合 R, 如果

$$R\subseteq X_1\times\cdots\times X_n, \tag{3.8}$$

则称 R 为 n **元关系**.

3.2 函数

函数 一个二元关系 f 如果满足

$$(x,y)\in f\wedge (x,z)\in f\to y=z, \tag{3.9}$$

就称 f 是一个**函数**.

单射

$$f=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in f\wedge (x,z)\in f\to y=z,\ (x_1,y)\wedge (x_2,y)\in f\to x_1=x_2\}\,. \tag{3.10}$$

满射

$$f=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in f\wedge (x,z)\in f\to y=z,\ \mathrm{ran}\,(f)=Y\}\,. \tag{3.11}$$

双射: 既是单射又是满射的函数.

f 到 A 上的**限制**　对任意函数 f 和集合 A,

$$f\upharpoonright A=\{(x,y)\in f|x\in A\} \tag{3.12}$$

f 是 g 的**扩张**　$g=f\upharpoonright A$.
函数相容性　对于函数 f 和 g,f和g相容 记为 f CP g:

$$\forall x\in \mathrm{dom}\,(f)\cap \mathrm{dom}\,(g):f\,(x)=g\,(x)\,. \tag{3.13}$$

相容的系统

$$\forall f,g\in \mathcal{F}:f\ \mathrm{CP}\ g \tag{3.14}$$

则称函数的集合 $\mathcal{F}$ 为相容的系统.
函数族　令 X 和 Y 是集合,

$$Y^X=\{f\mid f:X\to Y\}\,. \tag{3.15}$$

指标系统　I 为指标集,$i\in I$ 每个 X_i 都是集合, 有如下函数:

$$I\to X \tag{3.16}$$

$$i\mapsto X_i \tag{3.17}$$

称 $X=\{X_i\mid i\in I\}$ 为集合的**指标系统**.
一般卡氏积　令 $X=\{X_i\mid i\in I\}$ 为指标系统, 则 X 的一般卡氏积为:

$$\prod_{i\in I}X_i=\{f\mid f\upharpoonright I\wedge\forall i\in I,f\,(i)\in X_i\}\,, \tag{3.18}$$

投射函数 p_i

$$p_i:\prod_{i\in I}X_i\to X_i \tag{3.19}$$

$$p_i\,(f):f\mapsto f\,(i) \tag{3.20}$$

选择公理 (第二形式)　对任意不含空集的非空集合族 $\mathcal{F}$ 上都存在**选择函数**, 即:

$$\exists f:\mathcal{F}\to\bigcup\mathcal{F} \tag{3.21}$$

$$\forall f\in\mathcal{F}:f\,(F)\in F. \tag{3.22}$$

3.3 等价与划分

等价关系　令 $R\subseteq X^2$, 若 R 同时满足
(1)　**自反**

$$\forall x\in X:\ R\,(x,x)\,; \tag{3.23}$$

(2)　**对称**:

$$\forall x,y\in X:\ R\,(x,y)\to R\,(y,x)\,; \tag{3.24}$$

(3)　**传递**:

$$\forall x,y,z\in X:R\,(x,y)\wedge R\,(y,z)\to R\,(x,z)\,; \tag{3.25}$$

则称 R 是**等价关系**.
理想　对任意集合 X, 如果 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}$ 并满足:

$$\emptyset\in\mathcal{I}; \tag{3.26}$$

$$(A\subseteq B)\wedge(B\in\mathcal{I})\to A\in\mathcal{I}; \tag{3.27}$$

$$(A,B\in\mathcal{I})\to(A\cup B\in\mathcal{I})\,. \tag{3.28}$$

则称 $\mathcal{I}$ 是 X 上的**理想**.

等价类 令 是 X 上的等价关系,$x \in X.x$ 关于 的**等价类**是集合:

$$[x]_\sim = \{t \in X \mid t \sim x\}. \tag{3.29}$$

划分 令 X 为一集合,$S \subseteq \mathcal{P}(X)$. 若同时满足:

$$\forall a, b \in S : (a \neq b) \to (a \cap b); \tag{3.30}$$

$$\bigcup S = X. \tag{3.31}$$

则称 S 是 X 的**划分**.

商集 令 $\sim$ 为 X 上的等价关系, 则

$$X/\sim = \{[x]_\sim \mid x \in X\} \tag{3.32}$$

称为 X 的商集.

3.4 序

偏序 令 $\leq$ 为 X 上的二元关系, 如果 $\leq$ 满足: 足

(1) **自反**

$$\forall x \in X : \ x \leq x; \tag{3.33}$$

(2) **反对称**:

$$\forall x, y \in X : \ (x \leq y) \wedge (y \leq x) \to R(x = y); \tag{3.34}$$

(3) **传递**:

$$\forall x, y, z \in X : (x \leq y \wedge y \leq z) \to (x \leq z); \tag{3.35}$$

则称 $\leq$ 是 X 上的**偏序**或**序**.

线序 若偏序 $\leq$ 还满足

(4) **连接**:

$$\forall x, y \in X : (x \leq y) \vee (y \leq x), \tag{3.36}$$

则称 $\leq$ 是 X 上的**线序**或**全序**.

偏 (线) 序集 $(X, \leq)$ 表示 $\leq$ 是 X 上的偏 (线) 序, 称 X 为偏 (线) 序集,

$$x \geq y \leftrightarrow x \leq^{-1} y, \tag{3.37}$$

$$x < y \leftrightarrow x \leq y. \tag{3.38}$$

令 $\leq$ 是 X 上的偏序

极小元 如果

$$\exists a \in X : \forall x \in X : \neg (a > x), \tag{3.39}$$

则称 a 为 X 的极小元.

极大元 如果

$$\exists a \in X : \forall x \in X : \neg (a < x), \tag{3.40}$$

则称 a 为 X 的极大元

最小元 如果

$$\exists a \in X : \forall x \in X : a \leq x, \tag{3.41}$$

则称 a 为 X 的最小元.

最大元 如果

$$\exists a \in X : \forall x \in X : a \geq x, \tag{3.42}$$

则称 a 为 X 的最大元.

上界 如果

$$X_0 \subseteq X : \exists a \in X : \forall x \in X_0 : a \geq x, \tag{3.43}$$

则称 X_0 在 X 中有上界, 称 a 为 X_0 在 X 中的上界.

上确界 设存在**上界集** $U := \{a \mid X_0 \subseteq X : \exists a \in X : \forall x \in X_0 : a \geq x\}$

$$\exists a_0 \in U : \forall u \in U : a_0 \leq u, \tag{3.44}$$

则称 a_0 为 X_0 的上确界, 记为 $\sup(X_0)$.

下界 如果

$$X_0 \subseteq X : \exists b \in X : \forall x \in X_0 : b \leq x, \tag{3.45}$$

则称 X_0 在 X 中有下界, 称 b 为 X_0 在 X 中的下界.

下确界 设存在**下界集** $D := \{b \mid X_0 \subseteq X : \exists b \in X : \forall x \in X_0 : b \leq x\}$

$$\exists b_0 \in D : \forall b \in D : b_0 \geq u, \tag{3.46}$$

则称 b_0 为 X_0 的下确界, 记为 $\inf(X_0)$.

3.5 自然数

归纳集 如果一个集合 X 满足:

$$\emptyset \in X \wedge \forall x \left(x \in X \to x^{+} \in X\right) \tag{3.47}$$

则称 X 为**归纳集**.

自然数 全体自然数的集合 $\mathbb{N}$ 定义为:

$$\mathbb{N} = \left\{n \mid \forall X \left(X\text{是归纳集} \to n \in X\right)\right\}. \tag{3.48}$$

$\mathbb{N}$ 的元素称为**自然数**.

$\mathbb{N}$ 上的归纳原理 令 $\varphi(x)$ 为一性质, 如果

(1) $\varphi(0)$,

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \to \varphi(n+1)$. 即:

$$[\varphi(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} (\varphi(n) \to \varphi(n+1))] \to \forall n \in \mathbb{N} \varphi(n). \tag{3.49}$$

引理 对所有自然数 m, n, k,

(1)

$$n \subset n+1 \ \wedge n \in n+1;$$

(2)

$$x \in n \ \to \ x \in \mathbb{N};$$

(3)

$$0 \in n \ \vee \ 0 = n;$$

(4)

$$k \in n+1 \text{ iff } (k \in n \vee k = n)$$

(5)

$$m \in n \ \to \ (m+1 \in n \vee m+1 = n)$$

(6)

$$(k \in m \ \wedge m \in n) \ \to k \in n$$

(7)

$$n \notin n;$$

(8)

$$m \in n \text{ iff } m \subset n.$$

良序集 集合 A 上的线序 $\leq$ 如果还满足: A 的每一非空子集都有最小元

$$\forall A_0 \subseteq A : \exists a \in A_0 : \forall x \in A : a \leq x. \tag{3.50}$$

就称 $\leq$ 为良序,$(A, \leq)$ 为**良序集**.

第二归纳原理 令 $\varphi(x)$ 为一个性质,

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \leq n : \varphi(k)) \to \varphi(n). \tag{3.51}$$

3.6 自然数上的递归定理与运算

递归定理 $\forall \text{set } A : \forall a \in A : \forall \text{Function } g\,(g : A \times \mathbb{N} \to A) : \exists! f\,(f : \mathbb{N} \to A) :$

$$f(1) = a,\ \forall n \in \mathbb{N} : f(n+1) = g(f(n), n). \tag{3.52}$$

带参数的递归定理 令 $a : P \to A,\ g : P \times A \times \mathbb{N} \to A$ 为函数, 则 $\exists! f : P \times \mathbb{N} \to A$satisfy:

$$\forall p \in P, f(p, 0) = a(p); \tag{3.53}$$

$$\forall (n \in \mathbb{N} \wedge p \in P)\, f(p, n+1) = g(p, f(p, n), n). \tag{3.54}$$

序列 以自然数 n 或者全体自然数的集合 $\mathbb{N}$ 为定义域的函数.
有穷序列

$$\langle a_i \mid i < n \rangle \text{ or } \langle a_i \mid i = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \rangle \text{ or } \langle a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \rangle; \tag{3.55}$$

无穷序列

$$\langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle \text{ or } \langle a_i \mid i = 0, 1, 2, \cdots \rangle \text{ or } \langle a_i \rangle_{i=0}^{\infty}; \tag{3.56}$$

空序列:$\langle\rangle$
由 A 的元素组成的所有穷序列的集合

$$A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{u \in \mathbb{N}} A^n; \tag{3.57}$$

有穷序列的值域

$$\{a_i | i < n\} \text{ or } \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}; \tag{3.58}$$

无穷序列的值域

$$\{a_i | i \in \mathbb{N}\} \text{ or } \{a_i\}_{i=0}^{\infty}. \tag{3.59}$$

超穷序列 (Transfinite Sequence) 一个定义域为序数的函数:

$$\langle \alpha_\xi \mid \xi < \alpha \rangle \tag{3.60}$$

也可称序列 $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ 是其 $\{\alpha_\xi \mid \xi < \alpha\}$ 范围内的**枚举**
存在唯一的函数 $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfy:
(1)

$$\forall m \in \mathbb{N}, +(m, 0) = m; \tag{3.61}$$

(2)

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, +(m, n+1) = +(m, n) + 1. \tag{3.62}$$

存在唯一的函数 $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfy:
(1)

$$\forall m \in \mathbb{N}, \cdot(m, 0) = 0; \tag{3.63}$$

(2)

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \cdot(m, n+1) = \cdot(m, n) + m. \tag{3.64}$$

$+_{\mathbb{N}}$:

$$(m + 0 = m) \wedge (m + (n+1) = (m+n) + 1). \tag{3.65}$$

$\cdot_{\mathbb{N}}$:

$$((m, 0) = 0) \wedge (m(n+1) = mn + m). \tag{3.66}$$

3.7 等势

等势 对集合 X, Y,

$$(\exists \text{ Bijection } f : X \to Y) \to |X| = |Y|. \tag{3.67}$$

则称集合 X 和 Y 是等势.

小于等于势 对集合 X, Y,

$$(\exists \text{ Injection } f : X \to Y) \to |X| \leq |Y|. \tag{3.68}$$

则称集合 X 的势小于等于 Y 的势.

$$|X| \leq |Y| \leftrightarrow \exists Z \subseteq Y : |X| = |Z|. \tag{3.69}$$

$$|X| < |Y| \leftrightarrow (|X| \leq |Y|) \wedge \neg (|X| = |Z|) \tag{3.70}$$

$\leq$ 是一个**偏序**, 自反性与传递性显然, 现证反对称性.

康托-伯恩斯坦定理

$$(|X| \leq |Y|) \wedge (|Y| \leq |X|) \to (|X| = |Y|)\,. \tag{3.71}$$

对任意集合 X:

有穷

$$\exists n \in \mathbb{N} : |X| = n; \tag{3.72}$$

无穷

$$\forall n \in \mathbb{N} : |X| \neq n; \tag{3.73}$$

可数或可数无穷

$$|X| = |\mathbb{N}|; \tag{3.74}$$

至多可数 有穷或可数的集合;

不可数 不是可数的集合.

鸽笼原理 若 n 是自然数, 则不存在 n 到它的真子集 $X \subset n$ 上的双射. 所以对任意的有穷集合 X, 不存在 X 到 X 的真子集双射.

每一无穷集合有一个可数子集.

两个可数的集合的并是可数集合.

有穷多个可数集合的并是可数的.

如果 A 和 B 是可数的, 则 $A \times B$ 是可数的.

3.8 整数与有理数

定义 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上的一个等价关系 $\sim$:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \text{ iff } m_1 +_{\mathbb{N}} n_2 = m_2 +_{\mathbb{N}} n_1. \tag{3.75}$$

整数集合 $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$. 整数集合上的序和运算定义如下:

序

$$[(m_1, n_1)] \leq_{\mathbb{Z}} [(m_2, n_2)] \leftrightarrow m_1 +_{\mathbb{N}} n_2 \leq_{\mathbb{N}} m_2 +_{\mathbb{N}} n_1; \tag{3.76}$$

加法

$$[(m_1, n_1)] +_{\mathbb{Z}} [(m_2, n_2)] = [m_1 +_{\mathbb{N}} m_2, n_1 +_{\mathbb{N}} n_2]\,; \tag{3.77}$$

乘法

$$[(m_1, n_1)] \cdot_{\mathbb{Z}} [(m_2, n_2)] = [m_1 \cdot_{\mathbb{N}} m_2 +_{\mathbb{N}} n_1 \cdot_{\mathbb{N}} n_2, m_1 \cdot_{\mathbb{N}} n_2 +_{\mathbb{N}} n_1 \cdot_{\mathbb{N}} m_2]\,. \tag{3.78}$$

加法逆元

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \exists ! a^{'} : a +_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} \tag{3.79}$$

定义 $\mathbb{Z}^+ = \{a \in \mathbb{Z} | a >_\mathbb{Z} 0_\mathbb{Z}\}$,$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ 上的等价关系 如下:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \text{iff} \quad a_1 \cdot_\mathbb{Z} b_2 = a_2 \cdot_\mathbb{Z} b_1. \tag{3.80}$$

有理数集合 $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ / \sim$. 有理数集合上的序和运算定义如下:

序

$$[(a_1, b_1)] \leq_\mathbb{Q} [(a_2, b_2)] \leftrightarrow a_1 \cdot_\mathbb{Z} b_2 \leq_\mathbb{Z} a_2 \cdot_\mathbb{Z} b_1; \tag{3.81}$$

加法

$$[(a_1, b_1)] +_\mathbb{Q} [(a_2, b_2)] = [a_1 \cdot_\mathbb{Z} b_2 +_\mathbb{Z} a_2 \cdot_\mathbb{Z} b_1, b_1 \cdot_\mathbb{Z} b_2]; \tag{3.82}$$

乘法

$$[(a_1, b_1)] \cdot_\mathbb{Q} [(a_2, b_2)] = [a_1 \cdot_\mathbb{Z} a_2, b_1 \cdot_\mathbb{Z} b_2]. \tag{3.83}$$

可数集合上的等价关系有至多可数个等价类.

整数集合 $\mathbb{Z}$ 和有理数的集合 $\mathbb{Q}$ 是可数无穷的.

稠密 对于线序集 $(X, <)$, 如果它至少有两个元素, 且

$$\forall a, b \in X : (a < b) \to (\exists x \in X : a < x < b). \tag{3.84}$$

则称线序集 $(X, <)$ 是稠密的.

显然, 有理数集合 $(\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q})$ 是**稠密**的, **可数**的, 且有理数**没有最大最小元**.

令 $(P, <_P)$ 为可数的无端点稠密线序, 则 $(P, <_P)$ 与 $(\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q})$ 同构 , 记为 $P \simeq_{set} \mathbb{Q}$.

3.9 实数

最小上界性质 线序集 $(X, \leq)$ 如果满足:

$$\forall Y \subseteq X \, (Y \neq \emptyset) : \exists U(Y) \to \exists sup(Y), \tag{3.85}$$

则称 X 具有最小上界性质.

有理数集合 $\mathbb{Q}$ 没有最小上界性质.

戴德金分割 如果集合 $A \subseteq \mathbb{Q}$ 满足:

(1)

$$(A \neq \emptyset) \wedge (A \neq \mathbb{Q}); \tag{3.86}$$

(2) A是向下封闭的

$$((p \in A)) \wedge (p < q) \to q \in A; \tag{3.87}$$

(3) A 没有最大元

$$(p \in A) \to (\exists q \in A : p < q), \tag{3.88}$$

就称 A 是**戴德金分割**. **实数集** $\mathbb{R}$: 全体戴德金的集合记为 $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$ 的元素又称为**实数**.

序

$$x_1 \leq_\mathbb{R} x_2 \quad \text{iff} \quad x_1 \subseteq x_2. \tag{3.89}$$

加法

$$x +_\mathbb{R} y = \{p +_\mathbb{Q} q | p \in x, q \in y\}; \tag{3.90}$$

乘法 如果 $x > 0, y > 0$, 则

$$x \cdot_\mathbb{R} y = \{r | r \leq p \cdot_\mathbb{Q} q \, (p \in x, q \in y, \ p, q >_\mathbb{Q} 0)\}, \tag{3.91}$$

$$x \cdot y = 0, \quad \text{iff} x = 0, y = 0; \tag{3.92}$$

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y), \quad \text{iff} x < 0, y < 0; \tag{3.93}$$

$$x \cdot y = -((-x) \cdot -y), \quad \text{iff} x < 0, y > 0; \tag{3.94}$$

$$x \cdot y = -(x \cdot (-y)), \quad \text{iff} x > 0, y < 0. \tag{3.95}$$

实数集合 $(\mathbb{R}, \leq_\mathbb{R})$ 有最小上界性质.

完备线序集 具有最小上界性质的稠密线序集.

任何包含可数稠密子集的无端点完备线序集都与 $(\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$ 同构.

3.10 不可数集合

区间套定理 设序列 $\{I_n|n \in w\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个**闭区间套**, 即:
(1) 每一个 I_n 都是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间.
(2) 对任意 n,$I_{n+1} \subset I_n$,
那么 $\bigcap_{n\in w} I_n \neq \emptyset$.
康托定理 $\{0,1\}$ 上的全体无穷序列组成的集合 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是不可数的.
定理 所有实数的集合 $\mathbb{R}$ 是不可数的.

4 拓扑空间: 构造和性质

4.1 拓扑空间

拓扑 M 为一集合,M 上的一拓扑为 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ 且:
(1)

$$\emptyset \in \mathcal{O} \ \wedge \ M \in \mathcal{O}; \tag{4.1}$$

(2) 有限并封闭

$$\{U, V\} \subseteq \mathcal{O} \ \rightarrow \ \bigcap \{U, V\} \in \mathcal{O}; \tag{4.2}$$

(3) 任意交封闭

$$C \subseteq \mathcal{O} \ \rightarrow \ \bigcup C \in \mathcal{O}. \tag{4.3}$$

拓扑空间 有序对 $(M, \mathcal{O})$ 被称为一个拓扑空间.
令 $(M, \mathcal{O})$ 为一拓扑空间, 则对于拓扑 $\mathcal{O}$. 集合 S 为:
开集

$$S \subseteq M \ \wedge \ S \in \mathcal{O}; \tag{4.4}$$

集 M 的子集对于特定的拓扑 $\mathcal{O}$ 来说可以是开的, 也可以是闭, 可以同时既开又闭, 亦或都不是.

开球 以点 p 为中心, 半径为 r 的开球:

$$B_r(p) := \left\{ q \in \mathbb{R}^d \mid \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (q_i - p_i)^2} < r \right\} \tag{4.5}$$

其中 $p := (p_1, p_2, \cdots, p_d)$,$q := (q_1, q_2, \ \cdots, q_d)$.

标准拓扑 $\mathbb{R}^d$ 上的拓扑 $\mathcal{O}_{std}$:

$$U \in \mathcal{O}_{std} \ \leftrightarrow \ \forall p \in U : \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U. \tag{4.6}$$

余有限拓扑 τ_f 一拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$,$\tau_f = \left\{A^c | A\text{是}\mathcal{O}\text{的有限子集}\right\} \cup \{\emptyset\}$.
余可数拓扑 τ_c 一拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$,$\tau_c = \left\{A^c | A\text{是}\mathcal{O}\text{的可数子集}\right\} \cup \{\emptyset\}$.
欧式拓扑 τ_e 设 $\mathbb{R}$ 是全体实数的集合, 规定 $\tau_e = \left\{U | U\text{是若干个开区间的并集}\right\}$, 称 τ_e 是 $\mathbb{R}$ 上的欧式拓扑, 记作 $\mathbb{E}^1 = (\mathbb{R}, \tau_e)$. (标准拓扑的另一种描述?)

度量 集合 X 上规定了一个**度量** d 是一个**函数** $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, 它满足
(1) 正定性:

$$\forall x \in X : d(x, x) = 0, \ x \neq y : d(x, y) > 0; \tag{4.7}$$

(2) 对称性

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x); \tag{4.8}$$

(3) 三角不等式:

$$\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(x, z) \geqslant d(y, z). \tag{4.9}$$

度量空间 当集合 X 上规定了一个度量 d 后, 称为**度量空间**, 记为 (X, d).
n 维欧式空间 记 $\mathbb{R}^n = \{(x1_1, \ x2_2, \cdots, xn_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}$, 规定 $\mathbb{R}^n$ 上的度量 d 为:

$$d((x_1, \ x_2, \cdots, x_n), (y_1, \ y_2, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)}, \tag{4.10}$$

易证 d 满足 (1),(2),(3). 记 $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$ 为 n 维欧式空间

球形邻域 一度量空间 (X, d), 设对 X 中任意一点 x_0 都存在一个正整数 ϵ, 使得 $x0$ 都在以 x_0 为中心,ϵ 为半径的**球形邻域**中, 即

$$U \in \tau_d \ \Leftrightarrow \ \forall x_0 \in X : \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\epsilon(X_0) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < \epsilon\} \tag{4.11}$$

度量拓扑 X 的子集族 $\tau_d = \left\{U | \bigcup_{x \in U} B_{\epsilon_x}(x)\right\}$ 是 X 上的一个度量拓扑, 称 τ_d 为 X 上由度量 d 决定的**度量拓扑**, 每个度量空间都自然地看成具有度量的拓扑的拓扑空间, 从而欧式空间 $\mathbb{E}^n$ 也是拓扑空间.

4.2 从给定的拓扑构造新的拓扑

子拓扑 $(M,\mathcal{O})$ 为一拓扑空间, 取 M 的一个子集 N,$N\subset M$, 则:

$$\mathcal{O}\mid_N:=\{U\cap N\mid U\in\mathcal{O}\}\subseteq\mathcal{P}(N)\,. \tag{4.12}$$

可以称 $\mathcal{O}\mid_N$ 是 $\mathcal{O}$ **生成生成的子拓扑**.

例 1 考虑一维实数轴上的拓扑空间 $(\mathbb{R},\mathcal{O}_{\text{std}})$, 令:

$$N=[-1,1]:=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x\le 1\}.$$

则 $(N,\mathcal{O}_{\text{std}}|_N)$ 是一个拓扑空间. 虽然因为 $(0,1]\notin\mathcal{O}_{\text{std}}$, 集合 $(0,1]$ 在 $(\mathbb{R},\mathcal{O}_{\text{std}})$ 中不是开集. 但因为:

$$(0,1]=(0,2)\cap[-1,1],$$

其中 $(0,2)\in\mathcal{O}_{\text{std}}$, 因此 $(0,1]\in\mathcal{O}_{\text{std}}|_N$, 也就是说, 集合 $(0,1]$ 在拓扑空间 $(N,\mathcal{O}_{\text{std}}|_N)$ 中是开集.

商拓扑 $(M,\mathcal{O})$ 为一拓扑空间,$\sim$ 为 M 上的一个等价关系, 则由商集 $M/\sim=\{[m]\in\mathcal{P}(M)\mid m\in M\}$ 诱导的拓扑:

$$\mathcal{O}_{M/\sim}:=\{U\in M/\sim\mid\bigcup U=\bigcup_{[a]\in U}[a]\in\mathcal{O}\}. \tag{4.13}$$

称之为商拓扑 $\mathcal{O}_{M/\sim}$.

商映射 (商拓扑上的等价关系)

$$q:M\to M/\sim$$

$$m\mapsto[m]$$

若定义了商映射, 则商拓扑的另一种写法:

$$\mathcal{O}_{M/\sim}:=\left\{U\in M/\sim\mid \operatorname{preim}_q(U)U\in\mathcal{O}\right\}. \tag{4.14}$$

投射 设 X_1 和 X_2 是两个集合, 规定

$$j_i:X_1\times X_2\to X_i, \tag{4.15}$$

$$j_i:(x_1,x_2)\mapsto x_i(i=1,2), \tag{4.16}$$

称为 $X_1\times X_2$ 到 X_i 的**投射**.

直积拓扑 令 $(A,\mathcal{O}_A)$, $(B,\mathcal{O}_B)$ 为拓扑空间, 则称集合 $\mathcal{O}_{A\times B}$

$$U\in\mathcal{O}_{A\times B}:\Leftrightarrow\forall p\in U:\exists(S,T)\in\mathcal{O}_A\times\mathcal{O}_B:S\times T\subseteq U. \tag{4.17}$$

是在 $A\times B$ 上的直积拓扑. 称 $(A\times B,{}_{A\times B})$ 是 $(A,\mathcal{O}_A)$, 和 $(B,\mathcal{O}_B)$ 的**直积空间**.(ps: 这里略去了所能构造的最小的直积拓扑空间, 详细参照尤承业书 p32)

集合 X 的拓扑基 如果子集族 $\mathcal{B}$ 的闭包 $\overline{\mathcal{B}}$ 是集合 X 的一个拓扑.

子集族 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的拓扑基的充要条件:

(1)$\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B=X$(拓扑的公理性质 (1));

(2) 若 $B_1,B_2\in\mathcal{B}$, 则 $B_1\cap B_2\in\overline{\mathcal{B}}$(也就是 $\forall x\in B_1\cap B_2:\exists B\in\mathcal{B}:x\in B\subset B_1\cap B_2$(利用闭包的性质.))

例 1 规定 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\mathcal{B}=\{[a,b)\mid a<b\}$. 显然 $\mathcal{B}$ 满足命题 (1). 任取 $[a_1,b_1)$ 和 $[a_2,b_2)$, 若 $x\in[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2)$, 记 $a=max\{a_1,a_2\}$, $a=min\{b_1,b_2\}$, 于是 $a\leqslant x<b$. 则 $[a,b)\in\mathcal{B}\wedge x\in[a,b)\subset[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2)$. 从而条件 (2) 也满足. 综上,$\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑基.

拓扑空间 (X,τ) 的拓扑基 如果子集族 $\overline{\mathcal{B}}=\tau$, 则称 $\mathcal{B}$ 为拓扑空间 (X,τ) 的拓扑基础. 子集族 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 (X,τ) 的拓扑基的充要条件:

(1)$\mathcal{B}\subset\tau$(即 $\mathcal{B}$ 的元素是开集);

(2)$\tau\subset\overline{\mathcal{B}}$(即每个开集都是 $\overline{\mathcal{B}}$ 中的一些成员的并集, 也是闭包性质的体现).

4.3 收敛 (Convergence)

(点) 序列: 令 M 为一个集合,M 的一个 (点) 序列为一个函数

$$q:\mathbb{N}\to M. \tag{4.18}$$

收敛 令 $(M,\mathcal{O})$ 为一个拓扑空间,M 的一个序列 q 被称为收敛于点 $a\in M$

$$\forall U\in\mathcal{O}:a\in U\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N}:\forall n>N:q(n)\in U. \tag{4.19}$$

邻域 M 的一个开集对于点 $a\in U$ 称为点 a 的一个开邻域, 记为 U_a, 则收敛的定义可重写为:

$$\forall U(a):\exists N\in\mathbb{N}:\forall n>N:q(n)\in U. \tag{4.20}$$

内点, 内部 设 A 是拓扑空间 $(M,\mathcal{O})$ 的 M 的一个开集, 若存在开集 U, 使得 $x\in U\subset A$, 则称 x 是 A 的一个**内点**,A 是 x 的一个**邻域**.A 的所有内点的集合称为 A 的**内部**, 记作 $A^{\cdot}$

$(n-\epsilon)$ 考虑 d 维实数集的标准拓扑空间 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{O}_{std})$: 则, 一个序列 $q:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^d$ 收敛于点 $a\in\mathbb{R}^d$:

$$\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}:\forall n>N:\|q(n)-a\|_2<\epsilon. \tag{4.21}$$

聚点 设 A 是拓扑空间 $(M,\mathcal{O})$ 的 $\mathcal{O}$ 的一个子集, 如果 $x\in X$. 如果 x 的每个邻域都含有 $A/\{x\}$ 中的点, 即:

$$A\in\mathcal{O}:x\in A:\forall U(x):\exists y\in U(x)\to y\in A/\{x\}, \tag{4.22}$$

则称 x 为 A 的一个**聚点** (可以想象设 A 为开球, 开球的边界上不属于集合 A 而属于 X 的点就可以是聚点).

有限集是没有聚点的 **例 1** 设 $X=\{a,b,c\}$, 规定拓扑为 $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$, 则当 $A=\{a\}$ 时,b 和 c 都是 A 的聚点, 因为 b 和 c 的邻域只有 X 一个, 它包含 a.a 不是 A 的聚点, 因为 $A/\{a\}=\emptyset$.

导集 A 的所有聚点的集合, 记作 A'.

闭包 $\overline{A}:=A\cup A'$ 为 A 的闭包. 易推得:$x\in\overline{A}\Rightarrow\forall U(x)\cap A\neq\emptyset$.

稠密子集 对于拓扑空间 $(X,\mathcal{O}_X)$, 如果 $A\subseteq X\ \wedge\ \overline{A}=X$.

可分拓扑空间 对于拓扑空间 $(X,\mathcal{O}_X)$, 如果 X 有可数的稠密子集.

例 1 $(\mathbb{R},\tau_f)$ 是可分的, 因为它的任一无穷子集都是稠密的, 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是它的一个可数稠密子集;$(\mathbb{R},\tau_c)$ 是不可分的, 因为它的任一可数集都是闭集, 不可能稠密.

4.4 连续 (Continuity)

连续 令 $(M,\mathcal{O}_M)$, $(N,\mathcal{O}_N)$ 为拓扑空间, 令 $\varphi:M\to N$ 为两个集合间的一个映射, 若 $\mathcal{O}_N$ 中任意开集 S, 在映射 φ 下的原像 $\mathrm{preim}_\varphi(S):=\{m\in M:\varphi(m)\in S\}$ 在拓扑 $\mathcal{O}_M$ 中也是开集, 那么就称这个映射 φ 是连续的, 即:

$$\forall S\in\mathcal{O}_N,\mathrm{preim}_\varphi(S)\in\mathcal{O}_M \tag{4.23}$$

例子 考虑标准拓扑空间 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{O}_{\mathrm{std}})$ 和 $(\mathbb{R}^s,\mathcal{O}_{\mathrm{std}})$. 若映射 $\phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^s$ 分别对应的拓扑空间都满足 ε-δ 的连续定义, 那么映射 ϕ 是连续的:

$$\forall a\in\mathbb{R}^d:\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall 0<\|x-a\|_2<\delta:\|\phi(x)-\phi(a)\|_2<\varepsilon. \tag{4.24}$$

例子 设 $f:E^1\to E^1$ 是一个函数,$x_0\in E^1$. f 在 x_0 处连续的含义有多种描述方法, 如:

用**序列**语言 如果序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 则序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x_0)$;

用 $\epsilon-\delta$ 语言 对任意正数 $\epsilon>0$, 总可找到 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\epsilon$ 时,$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$;

用**开集**语言 若 V 是包含 $f(x_0)$ 的开集, 则存在包含 x_0 的开集 U, 使得 $f(U)\subset V$.

同胚 (homeomorphism) 令 $(M,\mathcal{O}_M)$, $(N,\mathcal{O}_N)$ 为拓扑空间. 若两个集合间存在一个双射 $\phi: M\to N$ 同时满足 $\phi: M\to N$ 和 $\phi^{-1}: N\to M$ 都是连续的, 那么我们称这个双射 ϕ 是**同胚映射**. 显然同胚映射也是拓扑上的同构映射.

例 1 开区间 (作为 $\mathbb{E}^1$ 的子空间) 同胚于 E^1.

如 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 到 $\mathbb{E}^1$ 的同胚映射 f 可规定为:

$$\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), f(x)=\tan x. \tag{4.25}$$

例 2 $\mathbb{E}^n$ 中的单位球体 $D^n=\{x\in\mathbb{E}^n \mid ||x||\leqslant 1\}$ 的内部 $\mathring{D}^n$ 同胚于 $\mathbb{E}^n$. 同胚映射 $f:\mathring{D}^n\to E^n$ 可规定为:

$$\forall x\in\mathring{D}^n: f(x)=\frac{x}{1-||x||}, \tag{4.26}$$

它的逆映射为:

$$\forall y\in\mathbb{E}^n: f^{-1}(y)=\frac{y}{1+||y||}. \tag{4.27}$$

拓扑同构 若两个拓扑空间 $(M,\mathcal{O}_M)$, $(N,\mathcal{O}_N)$ 之间存在一个同胚映射, 那么称这个两个空间是同胚的, 或称之为拓扑同构的, 记为

$$(M,\mathcal{O}_M)\simeq_{top}(N,\mathcal{O}_N) \tag{4.28}$$

显然

$$(M,\mathcal{O}_M)\simeq_{top}(N,\mathcal{O}_N)\ to\ M\ \simeq_{set}\ N. \tag{4.29}$$

拓扑概念 拓扑空间的在同胚映射下保持不变的概念.

拓扑性质 在同胚映射下保持不变的性质.

5 拓扑空间: 常用的不变量

5.1 分离性质

T1 分离 一个拓扑空间 $(M,\mathcal{O})$, 如果对于任意两个不同的点 $p,\ q\in M, p\neq q$,

$$\exists U(p)\in\mathcal{O}: q\notin U(p). \tag{5.1}$$

则该拓扑空间为称为 $T1$ 分离的.

T2 分离 一个拓扑空间 $(M,\mathcal{O})$ 如果对于任意两个不同的点之间, 存在不相交的开邻域:

$$\forall p,q\in M: p\neq q\Rightarrow\exists U(p),V(q)\in\mathcal{O}: U(p)\cap V(q)=\varnothing.$$

例 1 标准拓扑 $(\mathbb{R},\mathcal{O}_{\text{std}})$ 既是 $T1$ 分离又是 $T2$ 分离的.

例 2 平凡拓扑空间 $M,\{\emptyset,\ M\}$ 显然并不是 $T1$ 分离的, 因为对 $\forall p\in M$, 点 p 的唯一开邻域为 M, 对于任何不同于点 p 的点 $q\in M$: 点 q 也属于 p 的唯一开邻域 M, 那么该平凡拓扑空间即非 $T1$ 分离亦非 $T2$ 分离的.

5.2 紧性和仿紧性

覆盖 一个拓扑空间 $(M,\mathcal{O})$, 集合 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}(M)$, 若

$$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}(M)\ \wedge\ \bigcup\mathcal{C}=M$$

则集合 $\mathcal{C}$ 称为 M 的一个覆盖.

开覆盖 若集合 $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}(M)\ \wedge\ \bigcup\mathcal{C}=M\ \wedge\ \mathcal{C}\subseteq\mathcal{O}$$

则集合 $\mathcal{C}$ 称为 M 的一个覆盖.

子覆盖 $\mathcal{C}$ 为一个覆盖, 若 $\mathcal{C}$ 的一个子集 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 也是一个覆盖, 即:

$$\widetilde{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{P}(M)\ \wedge\ \widetilde{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{C}\ \wedge\ \bigcup\widetilde{\mathcal{C}}=M$$

则集合 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 称为覆盖 $\mathcal{C}$ 的一个子覆盖.

有限子覆盖 $\mathcal{C}$ 为一个覆盖, 若 $\mathcal{C}$ 的一个子集 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 也是一个覆盖, 若存在一个 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 到自然数 n 的单射.

$$\widetilde{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{P}(M)\ \wedge\ \widetilde{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{C}\ \wedge\ \bigcup\widetilde{\mathcal{C}}=M\ \wedge\ \exists\text{ injection }\varphi:\widetilde{\mathcal{C}}\to n(n\in\mathbb{N}),$$

则集合 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 称为覆盖 $\mathcal{C}$ 的一个有限子覆盖.

$\mathbb{R}^d$ 的有界子集

$$S\subset\mathbb{R}^d\ \wedge\ \exists r\in\mathbb{R}^+: S\subseteq B_r(0). \tag{5.2}$$

紧空间 一个拓扑空间 $(M,\mathcal{O})$, 若对于所有该空间的**开覆盖**都存在一个**有限子覆盖**, 即

$$\exists(M,\mathcal{O}):\forall\mathcal{C}:\exists\text{finite}\widetilde{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{C}, \tag{5.3}$$

则称该空间是紧的.

有限个紧拓扑空间的乘积也是紧的.

紧集合 一个拓扑空间 $(M,\mathcal{O})$ 是紧的, 存在一个子集 $N\subseteq M$, 若 $(N,\mathcal{O}|_N)$ 也是紧的, 即:

$$\exists(M,\mathcal{O}):\forall\mathcal{C}:\exists\text{finite}\widetilde{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{C}\ \wedge\ N\subseteq M, \tag{5.4}$$

则称该集合是紧的.

有限覆盖 (海涅一博雷尔) 定理 令 $\mathbb{R}^d$ 装备标准拓扑 $\mathcal{O}_{\text{std}}$.$\mathbb{R}^d$ 的一个子集是紧的当且当它是闭的且有界的.

细化 (覆盖) 设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 都是 X 的覆盖, 如果 $\mathcal{U}'$ 的每个元素都是 $\mathcal{U}$ 的子集, 那么称 $\mathcal{U}'$ 是 $\mathcal{U}$ 的细化. 如果 $\mathcal{U}'$ 还是开覆盖, 那么称 $\mathcal{U}'$ 为 $\mathcal{U}$ 的开细化, 即:

$$\forall U \in \mathcal{U}' : \exists V \in \mathcal{U} : U \in V. \tag{5.5}$$

局域有限 (覆盖) 拓扑空间 $(M, \mathcal{O}_M)$ 的集合 M 中的每一点 x 都有一个邻域 V, 它只与覆盖 $\mathcal{U}$ 中有限个元素相交. 即:

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_M \ \wedge \ \forall p \in M : \exists U(p) : \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap U(p) \neq \emptyset\} \text{是有限的}. \tag{5.6}$$

仿紧 一个拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$ 是仿紧的, 当且仅当每个开覆盖有一个局域有限的开细化.

仿紧是紧的弱化版本 如果一个拓扑空间是紧的, 那么它也是仿紧的.

Ston 定理 每个度量空间都是仿紧的.

有限个仿紧的度量空间的直积空间也是仿紧的.

单位分解定理 一个拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$,M 的单位分解就是一个将集合 M 连续映射到区间 $[0, 1]$ 上的函数的集合, 使得对于 $\forall p \in M$ 以下条件成立

(1) 存在一个邻域 $U(p)$ 使得函数族 $\{f \in \mathcal{F} \mid \forall x \in U(p) : f(x) \neq 0\}$ 是有限的;

(2)$\sum_{f \in \mathcal{F}} f(p) = 1$.

(来自知乎 yuhangliu: 提供了一个把局部的东西粘成整体的东西的工具。比如证明光滑流形上存在黎曼度量，就可以先在每个坐标邻域上构造局部的内积，再利用 POU(partition of unity, 我们代数拓扑老师的简写) 把这些东西拼起来构成一个整体的内积。)

从属 (覆盖) 如果 $\mathcal{C}$ 是一个开覆盖, 且对函数族 $\mathcal{F}$ 的任一函数 f 来说,$f(x) \neq 0$ 都落在 $\mathcal{C}$ 中的一个元素 (区间)U 中.

$$\forall f \in \mathcal{F} : \exists U \in \mathcal{C} : f(x) \neq 0 \to x \in U. \tag{5.7}$$

仿紧的 T_2 空间 令 $(M, \mathcal{O})$ 为豪斯多夫拓扑空间, 当且仅当它的每个开覆盖都有一个从属的单位分解函数族去覆盖, 则称该豪斯多夫拓扑空间是仿紧的.

5.3 连通性和道路连通性

连通性直观上的连通, 可以有两种含义: 其一是图形不能分割成互不“粘连”的两部分; 其二是图形上任何两点可以用图形. 上的线连结. 在拓扑学中, 这两种含义分别抽象成“连通性”和“道路连通性”两个概念.

拓扑连通性 一个 $(M, \mathcal{O})$ 是连通的除非存在两个非空的不相交的开集的并.

等价于:

(1)X 不能分解为两个非空不相交闭集的并;

(2)X 没有既开又闭的非空真子集;

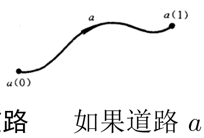
(3)X 的既开又闭的子集只有 X 与 $\emptyset$.

道路连通性

道路概念是“曲线”这种直观概念的抽象化. 曲线可看作点运动的轨迹. 如果把运动的起、终时刻记作 0 和 1, 那么运动就是闭区间 [0,1] 到空间的一个连续映射, 曲线就是这个映射的像集. 拓扑学中把这个连续映射称作道路, 它比像集包含更丰富的含义.

道路 设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是拓扑空间, 从单位闭区间 $I = [0, 1]$ 到 X 的一个连续映射 $a : I \to X$ 称为 X 上的一条道路. 把点 $a(0)$ 和点 $a(1)$ 分别称为 a 的**起点**和**终点**, 统称为**端点**.(*(拓扑学中用道路概念代替曲线, 道路本身是一种连续映射)*.)

道路是指映射本身, 而不是它的像集. 事实上可能有许多不同道路, 它们的像集完全相同. 在作图时, 很难把映射表示出来，只能以它的像集代表它, 并且画- -箭头表示点运动的方向 (如



图所示).

点道路 如果道路 $a : I \to X$ 是常值映射, 即 $a(I)$ 是一点, 就称为点道路. 点道路完全被像点 x 决定. 它记作 e_x.

闭路 起点与终点重合的道路称为闭路. 例如点道路是闭路.

道路有两种运算: 逆和乘积.

逆路 一条道路 $a: I \to X$ 的逆也是 X 上的道路, 记作 $\bar{a}$, 规定为 $a(t) = a(1-t), t \in I$(图 2. 8(a)).

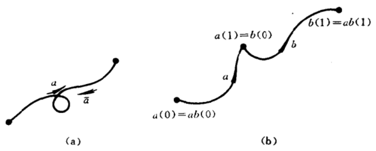


图 2-8

X 上的两条道路 a 与 b 如果满足 $a(1) = b(0)$, 则可规定它们的乘积 ab, 它也是 X 上的道路, 规定为

$$ab(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ b(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.8}$$

5.4 同伦曲线和基本群

代数拓扑学的基本思想是对拓扑空间建立以代数概念 (如群、交换群、环等.) 为形式的拓扑不变量, 从而把代数方法引进拓扑学研究中来, 为了理解道路的收缩和变形的意义, 先一般地介绍连续映射的变形, 也就是同伦概念.

同伦映射 设 $(M, \mathcal{O}_m)$ 和 $(N, \mathcal{O}_n)$ 都是拓扑空间, 记录 $C(M, N)$ 是 M 到 N 的所有连续映射的集合, 设 $f, g \in C(M, N)$. 如果有连续映射 $H: X \times Y \to Y$, 使得 $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x)$, 则称 f 与 g **同伦**, 记为 $f \cong g$. 称 H 是连接 f 和 g 的一个**同伦**.

对每个 $t \in I$, 同伦 H 决定 $h_t \in C(X, Y)$ 为:$h_t(x) = H(x, t)$, 于是得到单参数连续映射族 $\{h_t | t \in I\}$, 称 h_t 为 H 的 t-切片.

同伦曲线 一个拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$, 两条曲线 $\gamma, \delta: [0, 1] \to M$ 为:

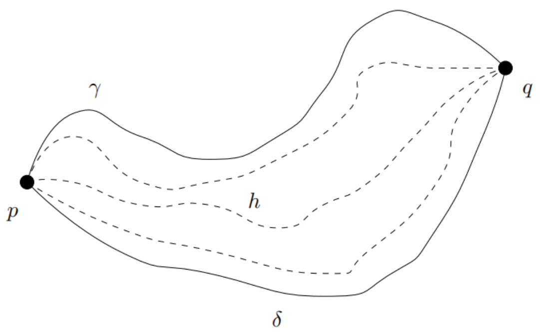
$$\gamma(0) = \delta(0) \ \wedge \ \gamma(1) = \delta(1) \tag{5.9}$$

假如存在一个连续映射 $h: [0, 1] \times [0, 1] \to M$ 使得对于所有的 $\lambda \in [0, 1]$:

$$h(0, \lambda) = \gamma(\lambda) \ \wedge \ h(1, \lambda) = \delta(\lambda) \tag{5.10}$$

则称这两条曲线是同伦的, 并且是**定端同伦的**.

道路类 $(M, \mathcal{O}_m)$ 的所有道路在定端同伦下分成的等价类称为 $(M, \mathcal{O}_m)$ 的**道路类**如图所示，如果两条曲线可以连续变形，则它们是同伦的。



点道路是零伦的.

映射类 设 $(M, \mathcal{O}_m)$ 和 $(N, \mathcal{O}_n)$ 都是拓扑空间, 记 $C(M, N)$ 是 M 到 N 的所有连续映射的集合, 设 $f, g \in C(M, N), f \cong g$ 是 $C(M, N)$ 中的一种等价关系, 把 $C(M, N)$ 在同伦关系下分成的等价类称为**映射类**. 所有映射类的集合记作 $[X, Y]$.

循环空间 (闭路类集合) 令 $(M, \mathcal{O})$ 为一个拓扑空间, 于是, 对于 M 中的任意一点 $p \in M$, 定义以 p 为基点的循环空间是那些封闭道路组成的集合:

$$\mathcal{L}_p := \{\gamma: [0, 1] \to M \mid \gamma\text{是连续的} \ \wedge \ \gamma(0) = \gamma(1)\} \tag{5.11}$$

道路类乘法　令 $\mathcal{L}$ 为点 $p \in M$. 我们定义道路类的乘法 (关联操作)$* : \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_p \to \mathcal{L}_p$:

$$(\gamma * \delta)(t) := \begin{cases} \gamma(2\lambda), & 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2, \\ \delta(2\lambda - 1), & 1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.12}$$

基本群　称 $\pi(p)$ 在道路乘法运算下构成的群为拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$ 以 p 为基点的**基本群**

$$\pi_1(p) := \mathcal{L}_p / \sim = \{[\gamma] \,|\gamma \in \mathcal{L}_p\} \tag{5.13}$$

其中 $\sim$ 是在映射

$$\bullet : \pi_1(p) \times \pi_p \to (p) \tag{5.14}$$

$$(\gamma, \delta) \mapsto [\gamma] \bullet [\delta] := [\gamma * \delta] \,. \tag{5.15}$$

道路乘法在基本群中的运算性质　(1) 结合律;(2) 单位元;(3) 逆元.

群同构

恒定曲线　操作 $\bullet$ 是关联的（因为结合律是关联的）；基本群 $(\pi_1(p), \bullet)$ 的单位元是（等价类）恒定曲线 γ_e，其定义为：

$$\gamma_e : [0, 1] \to \tag{5.16}$$

$$\lambda \mapsto \gamma_e(0) = p \tag{5.17}$$

.

5.5　S^n 基本群

6 拓扑流形和丛

6.1 拓扑流形

拓扑流形 对于一个仿紧的, 豪斯多夫的, 拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$ 中的每个点 $p \in M$ 存在一个邻域 $U(p)$, 并存在一个与 d 维欧式空间同胚的映射 $x : U(p) \to x(U(p)) \subseteq R^d$, 记 $\dim M = d$.

同胚的两个流形的维度相等.

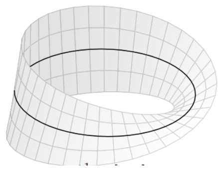
例 1 S^1 是一维流形, 球面, 圆柱, 圆环面 $S^2, C = S^1 \times R, T^2$ 是二维流形.

子流形 令 $(M, \mathcal{O})$ 为一个拓扑流形, 且 N 为 M 的子集,$N \subseteq M$. 则 $(N.\mathcal{O}|_N)$ 是 $(M, \mathcal{O})$ 的一个子流形.

直积流形 令 $(M, \mathcal{O}_M)$ 和 $(N, \mathcal{O}_N)$ 分别为维度为 m 和 n 的流形, 则称 $(M \times N, \mathcal{O}_{M\times N})$ 为维度为 $m + d$ 的直积流形.

6.2 丛

直积非常有用。在物理学中，人们经常会直观地将两个流形的直积视为将第二个流形的副本附加到第一个流形的每个点上。但是，并非所有有趣的流形都可以理解为流形的产物。一个典型的例子是莫比乌斯带。

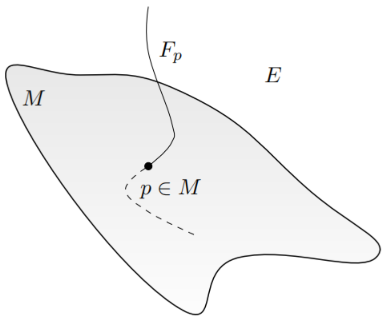


它局部地看起来像有限圆柱 $S^1 \times [0, 1]$，我们可以将其描绘为圆 S^1（图中的粗线），并在每个圆点上附加有限间隔 $[0, 1]$ 并使其道路“平滑”。莫比乌斯带材具有“扭曲”特性，这使其在整体上与圆柱体不同。

丛 (拓扑空间的) 丛是一个三元组 (E, π, M) 其中 E 和 M 分别是被称为主空间和底空间的拓扑流形, 其中连续的满射 $\pi : E \to M$ 被称为投影映射.

通常将丛 (E, π, M) 记为 $E \xrightarrow{\pi} M$.

纤维 令 $E \xrightarrow{\pi} M$ 为一个丛, 对于底空间中一点 $p \in M$, 则称 $F_p := \text{preim}_\pi(\{p\})$ 为点 p 处的纤维. 直观地讲，点 $p \in M$ 的纤维是 E 中投影到点 p 的一组点（在下面以线表示）。投影映射将纤维 F_p 的所有点映射到点 p。



例 1 丛的一个平凡的例子是直积丛. 令 M 和 N 为流形, 一个三元组 $(M \times N, \pi, M)$, 其中:

$$\pi : M \times N \to M \tag{6.1}$$

$$(p, q) \mapsto p \tag{6.2}$$

是一个丛, 因为 π 是连续且满的; 类似地,$(M \times N, \pi, M)$ 也是一个丛.

例 2 在一个丛中，底流形的不同点可能具有（拓扑上）不同的纤维。例如, 考虑丛 $E \to \mathbb{R}$ 其中:

$$F_p := \text{preim}_\pi(\{p\}) \cong_{top} \begin{cases} S^1, & \text{if } p < 0 \\ \{p\}, & \text{if } p = 0 \\ \{[0,1]\}, & \text{if } p > 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

纤维丛 令 $E \to \mathbb{R}$ 为一个丛, 并且令 F 为一个流形, 如果

$$\forall p \in M : \text{preim}_\pi(\{p\}) \cong_{top} F. \tag{6.4}$$

则称 $E \to \mathbb{R}$ 是一个具有纤维 F 的纤维丛.

一个纤维丛通常用示意图表示为:

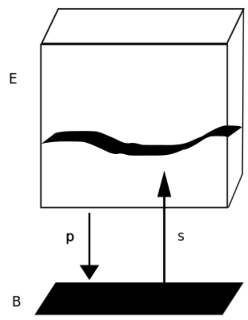
$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & M \end{array}$$

例 2 纤维丛 $M \times N \xrightarrow{\pi} M$ 是一个带有纤维 $F := N$ 的纤维丛.

例 3 莫比乌斯带是一个带有纤维 $F := [0,1]$ 的纤维丛 $E \xrightarrow{\pi} S^1$, 其中 $E \neq S^1 \times [0,1]$, 即莫比乌斯带不是一个直积丛.

例 4 M 上的 $\mathbb{C}$-line 丛是一个带有纤维 $\mathbb{C}$ 的纤维丛 (E, π, M). 记直积丛 $(M \times \mathbb{C}, \pi, M)$ 是 M 上的一个 $\mathbb{C}$-line 丛, 但一个 M 上的一个 $\mathbb{C}$-line 丛不一定是一个直积丛.

截面 令 $E \xrightarrow{\pi} M$ 为一个丛, 若存在一个映射 $\sigma : M \to E$ 使得 $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$, 则该映射被称为一个截面.



.

直观地讲，截面是一个映射 σ，它将底空间 M 每个点 $p \in M$ 发送到纤维 F_p 中的某些点 $\sigma(p)$ 中, 因此投影映射 π 使 $\sigma(p) \in F_p \subseteq E$ 返回到点 $p \in M$.

例 6.11 令 $(M \times F, \pi, M)$ 为一个直积丛, 则这个丛的一个截面为:

$$\sigma : M \to M \times F$$

$$p \mapsto (p, s(p))$$

, 其中 $s : M \to F$ 为任意映射.

子丛 (E, π, M) 的一个子丛是三元组 (E', π', M'), 其中 $E' \subseteq E$ 和 $M' \subseteq M$ 都是对应的子流形,$\pi' := \pi|_E$ 是 π 限制在 E' 上的投影映射.

底流形上的限制 令 (E, π, M) 为一个丛, 并且令 $N \subseteq M$ 为底流形的子流形, 则底流形上的限制是三元组 (E, π', M), 其中:

$$\pi' := \pi|_{\text{preim}_\pi(N)} \tag{6.5}$$

丛态射 令 $E \xrightarrow{\pi} E'$ 和 $v: M \to M'$ 分别为两个丛, 则称 (u, v) 为丛映射, 如下所示: 即 $\pi' \circ u = v \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "v"] & M' \end{tikzcd}.$$

如果 (u, v) 和 (u, v') 都是丛态映, 则 $v = v'$. 亦即, 给定 u, 则存在 v 使得 (u, v) 是一个丛态射, 则 v 是独一无二的.

丛同构 令 $E \xrightarrow{\pi} E'$ 和 $v: M \to M'$ 分别为两个丛, 若存在两个可逆丛态射 (u, v) 和 (u', v') 满足: 丛同态映射是保持结构 (例如流形的拓扑性质) 的映射.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[l, shift left, "u^{-1}"] \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, shift left, "v"] & M' \arrow[l, shift left, "v^{-1}"] \end{tikzcd}.$$

局域丛同构 一个丛 $E \xrightarrow{\pi} M$ 是与 $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ 局域丛同构的, 如果对底空间中所有的 $p \in M$, 存在一个邻域 $U(p)$ 作为底流形上的限制的投影映射:

$$\operatorname{preim}_\pi(U(p)) \xrightarrow{\pi|\operatorname{preim}_\pi(U(p))} U(p) \tag{6.6}$$

是与丛 $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ 同构的.

平凡与局部平凡 一个丛 $E \xrightarrow{\pi} M$ 是:

(1) 平凡的, 当它与乘积丛 $(M \times F, \pi, M)$ 丛同构;

(2) 局部平凡的, 当它与乘积丛局部丛同构.

例 1 圆桶 $C = S^1 \times \mathbb{R}$ 是平凡丛, 同时也是局部平凡的.

例 2 莫比乌斯带是非平凡的但是局部平凡的.

从现在开始, 我们主要讨论局部平凡丛.

备注在量子力学中，通常所谓的“波函数”根本不是函数 (函数的定义是定义域和值域都是数域, 而这里是流形)，而是 $\mathbb{C}$-line 丛在物理空间上的一个截面。但是，如果我们假设所考虑的 $\mathbb{C}$-line 丛是局部平凡的，则丛的每个截面都可以用从底空间到主空间的映射（局部）来表示（局部），因此使用术语“波函数”。

拉回丛 令 $E \xrightarrow{\pi} M$ 称之为一个丛, 并令 $f: M' \to M$ 是从一些流形 M' 到底空间 M 的映射. 则称 $E \xrightarrow{\pi} M$ 的由映射 f 诱导的拉回丛定义为 $E' \xrightarrow{\pi'} M'$, 其中

$$E' = \{(m', e) \in M' \times E \sim f(m') = \pi(e)\} \tag{6.7}$$

且 $\pi' = (m', e) := m'$.

$E' \xrightarrow{\pi'} M'$ 是 $E \xrightarrow{\pi} M$ 的由映射 f 诱导的拉回丛, 则我们可以简单地构造一个丛映射, 通过定义

$$u: E' \to E$$
$$(m', e) \mapsto e.$$

可由如下示意图表示: **注意** 从上的截面拉回一个” 拉回丛”, 事实上, 令 $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ 是

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi'"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}.$$

$E \xrightarrow{\pi} M$ 的由映射 f 诱导的拉回丛. 若 σ 是 $E \xrightarrow{\pi} M$ 的一个截面, 则 $\sigma \circ F$ 决定一个从 M'

到 E 的映射, 它将 M' 中的每个 $m' \in M'$ 映射回 $\sigma(f(m')) \in E$. 但是, 因为 σ 是一个截面, 我们有

$$\pi(\sigma(f(m'))) = (\pi \circ \sigma \circ f)(m') = (\mathrm{id}_M \circ f)(m') = f(m')$$

因此,E' 可定义为 $(m', (\sigma \circ f)(m')) \in E'$. 进一步有

$$\pi'(m', (\sigma \circ f)(m')) = m'$$

, 因此映射:

$$\sigma' : M' \to E'$$

$$m' \mapsto (m', (\sigma \circ f)(m'))$$

满足 $\pi' \circ \sigma' = \mathrm{id}_{M'}$, 因此 σ 是拉回从 $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ 的截面.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[d, shift left, "\pi'"] & E \arrow[d, shift left, "\pi"] \\
M' \arrow[u, shift left, "\sigma'"] \arrow[ur, "\sigma \circ f"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

.

6.3 从地图集看流形

图表 令拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$ 为 d 维流形. 则称有序对 (U, x) 是该流形的一个坐标卡. 其中 U 是拓扑空间的一个开集, 而 $x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个同胚映射.

$x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ 的分量映射定义如下:

$$x^i : U \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \mathrm{proj}_i(x(p))$$

其中 $1 \le i \le d$, 其中 $\mathrm{proj}_i(x(p))$ 是 $x(p) \in R^d$ 的第 i 个分量. 其中 $x^i(p)$ 被称为点 $p \in U$ 对应图标 (U, x) 的坐标系.

地图册 流形 M 的一个地图册是所有图表组成集合 $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ 且使得:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M \tag{6.8}$$

$\mathcal{C}^0$ 相容 若两张图表 (U, x) 和 (V, y)

$$U \cap V = \emptyset \ \vee \ y \circ x^{-1} : (U \cap V) \to y(U \cap V)\text{连续} \tag{6.9}$$

则它们是 $\mathcal{C}^0$ 相容的.

注意 $y \circ x^{-1}$ 是从 $\mathbb{R}^d$ 的一个子集到 $\mathbb{R}^d$ 的另一个子集的映射.

$$\begin{tikzcd}
& U \cap V \subseteq M \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
x(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^d \arrow[rr, "y \circ x^{-1}"'] & & y(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^d
\end{tikzcd}$$

.

由于映射 x 和 y 是同胚映射，因此组成映射 $y \circ x^{-1}$ 也是同胚的，因此是连续的。因此，拓扑流形上的任何两个图表都是 $\mathcal{C}^0$ 兼容的。这个定义因此似乎是多余的，因为它适用于每对图表。但是，这只是“热身”，因为我们稍后将细化此定义并根据图表的 $\mathcal{C}^k$ 兼容性定义流形上地图的可微性。

流形的 $\mathcal{C}^0$ 地图册是成对的 $\mathcal{C}^0$ 兼容的图表的地图册。注意，任何地图册也是 $\mathcal{C}^0$ 的地图册。

最大地图册 如果对于每个 $(U,x)\in\mathcal{A}$，对于所有与 (U,x) 兼容的图表 (V,y)，我们都有 (V,y)，则 $\mathcal{C}^0$ 兼容地图册 $\mathcal{A}$ 被称为最大图册。

现在，我们可以从两个角度看待拓扑流形上的“对象”。例如，考虑 d 维流形 M 上的一条曲线，即映射 $\gamma:\mathbb{R}\to M$。我们现在询问该曲线是否连续，因为是否应该在“物理空间”M 上模拟粒子的轨迹。

第一个答案是，如果 $\gamma:\mathbb{R}\to M$ 作为拓扑空间 $\mathbb{R}$ 和 M 之间的映射是连续的，则它是连续的。

但是，您可能会更了解本科物理学的答案如下。我们仅考虑物理空间 M 的一部分（开放子集 U），而不是直接研究映射 $\gamma:\mathrm{preim}_\gamma(U)\to U$ 我们研究映射：

$$x\circ\gamma:\mathrm{preim}_\gamma(U)\to x(U)\subseteq\mathbb{R}^d \tag{6.10}$$

其中 (U,x) 也是 M 的图表.。更有可能的是，您将检查坐标映射 $x^i\circ\gamma$ 的连续性，这将意味着“实”曲线 $\gamma:\mathrm{preim}_\gamma(U)\to U$ 的连续性 (实数，相对于其坐标表示)。

$$\begin{tikzcd}
 & y(U)\subseteq\mathbb{R}^d & \\
\mathrm{preim}_\gamma(U)\subseteq\mathbb{R} \arrow[ur, "y\circ\gamma"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "x\circ\gamma"'] & U\subseteq M \arrow[u, "y"'] \arrow[d, "x"] & \\
 & x(U)\subseteq\mathbb{R}^d \arrow[uu, bend right=60, "y\circ x^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

.

在某些时候，您可能希望使用不同的“坐标系”来回答不同的问题。在这种情况下，您将选择一个不同的图表 (U,y)，然后研究映射 $y\circ\gamma$ 或其坐标映射。但是请注意，可以从先前图表 (U,x) 中获得的某些结果（例如 γ 的连续性）立即“传输”到新图表 (U,y) 通过图表传递映射 $y\circ x^{-1}$。此外，从直觉上讲，映射 $y\circ x^{-1}$ 使我们可以忽略在某种意义上是真实世界的内部结构（(即 U 和映射 γ,x,x)，而仅考虑 $\mathrm{preim}_\gamma(U)\subseteq\mathbb{R}$ 和 $x(U),y(U)\subseteq\mathbb{R}^d$ 以及它们之间的映射，这是我们对现实世界的表示。

7 微分结构: 定义和分类

7.1 通过完善（最大）图集添加结构

先前我们看到，对于拓扑流形 $(M, \mathcal{O})$，$\mathcal{C}^0$ 地图册的概念是完全多余的，因为每个地图册也是 $\mathcal{C}^0$ 地图册。现在，我们将 $\mathcal{C}^0$ 图集的概念，或更准确地说，是图表的 $\mathcal{C}^0$ 兼容性的概念，推广到非平凡和非冗余的概念。

Definition. 一个流形的地图册 $\mathscr{A}$ 被称为 ★-*atlas* 当且仅当 $(U, x), (V, y) \in \mathscr{A}$ 是 ★-相容的.

换句话说, $U \cap V = \varnothing$ or if $U \cap V \neq \varnothing$, 那么从 $x(U \cap V)$ 到 $y(U \cap V)$ 的传递映射 $y \circ x^{-1}$ 一定是 ★ 的.

$$\begin{tikzcd} & U \cap V \subseteq M \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ x(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M} \arrow[rr, "y \circ x^{-1}"'] & & y(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M} \end{tikzcd}$$

在您认为 Schuller 博士终于疯了之前,★ 被用作以下任意项的占位符：

- $\bigstar = \mathcal{C}^0$: 定义如前所述;
- $\bigstar = \mathcal{C}^k$: 如果 $\mathbb{R}^{\dim M}$ 的开子集间的传递映射是 k-次连续可微的;
- $\bigstar = \mathcal{C}^\infty$: 传递映射是光滑的 (无限次可微); 等价于地图册是 $\mathcal{C}^k$ 的, 对于所有的 $k \geq 0$;
- $\bigstar = \mathcal{C}^\omega$: 传递映射是实解析的, 这比光滑更强的条件;
- $\bigstar =$ complex: 如果 $\dim M$ 是偶数, M 是一个 复流形传递映射是连续的且满足柯西-黎曼方程, 它的复维度是 $\frac{1}{2}\dim M$.

在一方面, 如果你还没遇到柯西黎曼方程, 可以回忆 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{C}$ 是同构的集合, 我们可以定义函数

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned} \tag{7.1}$$

其中 $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 因此函数 f:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x + iy &\mapsto u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned} \tag{7.2}$$

如果 u 和 v 在 (x_0, y_0) 是在实数域可微的, 则 $f = u + \mathrm{i}v$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 是在复数域可微的, 当且仅当 u 和 v 满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

被称为 Cauchy-Riemann 方程。注意，复数平面上的可微性要求的条件比实数域上的可微性要强得多。如果您想了解更多，则应该参加复分析或函数论课程.

让我们回到流形.

Theorem 7.1 (Whitney). *任何最大 $\mathcal{C}^k$-图册包含一个 $\mathcal{C}^\infty$-图册, 其中 $k \geq 1$,. 进一步地, 任何包含 $\mathcal{C}^\infty$-图册的最大 $\mathcal{C}^k$-图册是全同的.*

一个直接的含义是，如果我们可以找到一个流形的 $\mathcal{C}^1$-图册，那么我们还可以假设存在该流形的 $\mathcal{C}^\infty$ 图册。通常，拓扑流形不是这种情况：具有 $\mathcal{C}^0$ 图集的空间可能不允许任何 $\mathcal{C}^1$ 图册。但是，如果我们至少有一个 $\mathcal{C}^1$ 地图册，则只需删除图表即可，仅保留与 $\mathcal{C}^\infty$ 兼容的图表即可获得 $\mathcal{C}^\infty$ 地图册。

因此，出于本课程的目的，在上述意义上，我们将不会区分 $\mathcal{C}^k(k \geq 1)$ 和 $\mathcal{C}^\infty$ 流形。

现在，我们给出 $\mathcal{C}^k$ 流形的明确定义。

Definition. 一个 $\mathcal{C}^k$-*流形* 是一个三元有序对 $(M, \mathcal{O}, \mathscr{A})$, 其中 $(M, \mathcal{O})$ 是一个拓扑流形且 $\mathscr{A}$ 是一个最大 $\mathcal{C}^k$-图表.

Remark 7.2. 给定的拓扑流形可以携带不同的不兼容地图集。

请注意，虽然我们仅定义了图表的兼容性，但应该清楚两个相同类型的地图集兼容的含义。

Definition. 两个 ★-图册 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 是 *相容的* 当他们的交 $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ 也是一个 ★-图册, 且与其他图册不相容.

或者，我们可以根据任何一对来自各个图册中的图表的兼容性来定义两个地图册的兼容性，每个图表中的一个。

Example 7.3. 令 $(M, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{std}})$. 考虑两个图册 $\mathscr{A} = \{(\mathbb{R}, \text{id}_\mathbb{R})\}$ 和 $\mathscr{B} = \{(\mathbb{R}, x)\}$, 其中 $x\colon a \mapsto \sqrt[3]{a}$. 由于它们都包含一个图表，因此很容易看到过渡映射上的兼容性条件（在两种情况下，唯一的过渡映射都是 $\text{id}_\mathbb{R}$)）。因此它们都是 $\mathcal{C}^\infty$-图集。

现在考虑 $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$。过渡映射 $\text{id}_\mathbb{R} \circ x^{-1}$ 是光滑的映射 $a \mapsto a^3$。但是，另一个过渡映射 $\circ x^{-1}\,\text{id}_\mathbb{R}$ 是映射 x ，它甚至一次都不可微分（0 处的第一个导数不存在）。因此，$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 甚至 $\mathcal{C}^1$ 不兼容。

前面的示例表明，我们可以为实数轴配备（至少）两个不同的不兼容 $\mathcal{C}^\infty$ 结构。这看起来像是一场灾难，因为它暗示着要使用哪种可微分的结构可以进行任意选择。幸运的是，情况并没有看上去那么糟，正如我们将在下一节中看到的那样。

7.2 微分流形

Definition. 令 $\phi\colon M \to N$ 为一个映射, 其中 $(M, \mathcal{O}_M, \mathscr{A}_M)$ 和 $(N, \mathcal{O}_N, \mathscr{A}_N)$ 为 $\mathcal{C}^k$-流形. 则 ϕ 被称为在点 $p \in M$ *可微的* ($\mathcal{C}^k$-), 如果对于它的一些坐标卡 $(U, x) \in \mathscr{A}_M$, 其中点 $p \in U$ 和 $(V, y) \in \mathscr{A}_N$ 且 $\phi(p) \in V$, 则坐标变换映射 $y \circ \phi \circ x^{-1}$ 通常对于 $x(p) \in x(U) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M}$ 是 k-次可微的.

$$\begin{tikzcd}
U \subseteq M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "x"] & V \subseteq N \arrow[d, "y"] \\
x(U) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M} \arrow[r, "y\circ\phi\circ x^{-1}"] & y(V) \subseteq \mathbb{R}^{\dim N}
\end{tikzcd}$$

Notice that in the previous definition we only require that *some* charts from the two atlases satisfy the stated property. So we should worry about whether this definition depends on which charts we pick. In fact, this “lifting” of the notion of differentiability from the chart representation of to the manifold level is well-defined. 上图显示了流形的典型主题。我们有一个映射 $\phi\colon M \to N$，我们想在 $p \in M$ 处定义 ϕ 的某些属性，类似于 $\mathbb{R}^d$ 的子集之间的映射的某些属性。我们通常要做的是考虑上面的一些图表（(U, x) 和 (V, y) 并根据下述坐标变换 $y \circ \phi \circ x^{-1}$ 的对应属性定义 $x(p) \in \mathbb{R}^d$ 处对应的属性。

请注意，在上一个定义中，我们仅要求两个地图集中的某些图表满足指定的属性。因此，我们应该担心此定义是否取决于我们选择的图表。实际上，这种可区分性概念从 ϕ 的坐标卡表示到流形可微等级的“提升”得到了很好的定义。

Proposition 7.4. *可微性的定义是一个良定义.*

Proof. 我们想知道 $y \circ \phi \circ x^{-1}$ 对于点 $p \in U$ 的一些坐标卡 $(U, x) \in \mathscr{A}_M$ 在 $x(p)$ 是可微的, 并且对于 $\phi(p) \in V$ 也有坐标卡 $(V, y) \in \mathscr{A}_N$ 存在, 则 $\widetilde{y} \circ \phi \circ \widetilde{x}^{-1}$ 在 $\widetilde{x}(p)$ 也是可微的, 对于点 p 的其他邻域域 $p \in \widetilde{U}$ 所有坐标卡 $(\widetilde{U}, \widetilde{x}) \in \mathscr{A}_M$ 也是可微的, 并且对于 $\phi(p) \in \widetilde{V}$ 也有坐标卡

$(\widetilde{V},\widetilde{y}) \in \mathscr{A}_N$.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{x}(U\cap\widetilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M} \arrow[rr, "\widetilde{y}\circ\phi\circ\widetilde{x}^{-1}"] & & \widetilde{y}(V\cap\widetilde{V}) \subseteq \mathbb{R}^{\dim N} \\
U\cap\widetilde{U} \subseteq M \arrow[u, "\widetilde{x}"] \arrow[d, "x"] \arrow[rr, "\phi"] & & V\cap\widetilde{V} \subseteq N \arrow[u, "\widetilde{y}"] \arrow[d, "y"] \\
x(U\cap\widetilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M} \arrow[rr, "y\circ\phi\circ x^{-1}"] \arrow[uu, bend left, "\widetilde{x}\circ x^{-1}"] & & y(V\cap\widetilde{V}) \subseteq \mathbb{R}^{\dim N} \arrow[uu, bend right, "\widetilde{y}\circ y^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

在上图中考虑映射 $\widetilde{x}\circ x^{-1}$. 因为坐标卡 (U,x) 和 $(\widetilde{U},\widetilde{x})$ 属于同一 $\mathcal{C}^k$-图册 $\mathscr{A}_M$, 坐标变换 $\widetilde{x}\circ x^{-1}$ 仍然是 $\mathbb{R}^{\dim M}$ 的子集之间的 $\mathcal{C}^k$-可微的映射, 同样的对 $\widetilde{y}\circ y^{-1}$ 也成立. 我们现在可以写下:

$$\widetilde{y}\circ\phi\circ\widetilde{x}^{-1} = (\widetilde{y}\circ y^{-1})\circ(y\circ\phi\circ x^{-1})\circ(\widetilde{x}\circ x^{-1})^{-1}$$

因此 $\mathcal{C}^k$ 的复合映射仍然是 $\mathcal{C}^k$ 的, 我们写下. □

该证明显示了限制 $\mathcal{C}^k$ 图册的意义。这样的地图册仅包含坐标变换为 $\mathcal{C}^k$ 的坐标卡，这使得我们对流形之间的坐标卡的可微性的定义得到了很好的定义。

对于光滑（($\mathcal{C}^\infty$) 流形，同样的定义和证明工作，在这种情况下，我们讨论的是光滑映射。正如我们之前所说，这是我们最感兴趣的情况。

Example 7.5. 考虑光滑流形 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{O}_{\text{std}},\mathscr{A}_d)$ 和 $(\mathbb{R}^{d'},\mathcal{O}_{\text{std}},\mathscr{A}_{d'})$, 其中 $\mathscr{A}_d$ 和 $\mathscr{A}_{d'}$ 是分别包含坐标卡 $(\mathbb{R}^d,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})$ 和 $(\mathbb{R}^{d'},\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d'}})$ 的最大地图册, 令 $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$ 为一个映射. 下图分别定义了各自坐标卡的可微变换 f:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}"] & \mathbb{R}^{d'} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d'}}"] \\
\mathbb{R}^d \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d'}}\circ f\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})^{-1}"] & \mathbb{R}^{d'}
\end{tikzcd}$$

并且, 由定义可知, 映射 f 是流形之间的光滑映射当且仅当映射 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d'}}\circ f\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})^{-1} = f$ 是通常意义上的光滑映射.

Example 7.6. 令 $(M,\mathcal{O},\mathscr{A})$ 为 d-维光滑流形且令坐标卡 $(U,x)\in\mathscr{A}$. 则 $x\colon U\to x(U)\subseteq\mathbb{R}^d$ 是光滑流形. 事实上我们有

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"] & x(U) \arrow[d, "\mathrm{id}_{x(U)}"] \\
x(U)\subseteq\mathbb{R}^d \arrow[r, "\mathrm{id}_{x(U)}\circ x\circ x^{-1}"] & x(U)\subseteq\mathbb{R}^d
\end{tikzcd}$$

因此 $x\colon U\to x(U)$ 是光滑的, 当且仅当映射 $\mathrm{id}_{x(U)}\circ x\circ x^{-1} = \mathrm{id}_{x(U)}$ 通常也是光滑的, 就是这样.

坐标映射 $x^i := \mathrm{proj}_i\circ x\colon U\to\mathbb{R}$ 是光滑的. 事实上考虑图像

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "x^i"] \arrow[d, "x"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}}"] \\
x(U)\subseteq\mathbb{R}^d \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\circ x^i\circ x^{-1}"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

则, x^i 是光滑的, 当且仅当映射

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ x^i \circ x^{-1} = x^i \circ x^{-1} = \mathrm{proj}_i$$

通常也是光滑的, 就是这样.

7.3 微分结构的分类

Definition. 令 $\phi\colon M \to N$ 为两个流形之间的双射. 如果 ϕ 和 ϕ^{-1} 是光滑的, 则 ϕ 被称为 *微分同胚的*.

微分同胚是两个光滑流形间的保构映射.

Definition. 两个流形 $(M, \mathcal{O}_M, \mathscr{A}_M)$, $(N, \mathcal{O}_N, \mathscr{A}_N)$ 是 *微分同胚*如果 M 和 N 之间存在一个同胚映射 $\phi\colon M \to N$. 我们称 $M \cong_{\text{diff}} N$.

请注意，如果理解了微分的结构（或无关紧要），我们通常会写 M 而不是三元有序对 $(M, \mathcal{O}_M, \mathscr{A}_M)$。

Remark 7.7. 微分同胚是等价关系。实际上，从微分几何学的角度来看，通常认为微分流形是相同的。这类似于拓扑空间的情况，在拓扑空间中，我们认为同胚空间是相同的。这是所有保构映射的典型特征。

有了微分同构的概念，我们现在可以提出以下问题：在给定的拓扑空间上，到微分同构为止有多少个平滑结构？

答案非常令人惊讶：它取决于流形的维度！

Theorem 7.8 (Radon-Moise)**.** *令 M 为具有维度 $\dim M = 1, 2$ 或 3 的流形. 然后在 M 上有一个独特的平滑的微分同构。*

回忆一下，在前面的示例中，我们表明可以为 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{std}})$ 配备两个不相容的地图册 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$。令 $\mathscr{A}_{\max}$ 和 $\mathscr{B}_{\max}$ 为它们对最大地图集的扩展，并考虑平滑流形 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{std}}, \mathscr{A}_{\max})$ 和 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{std}}, \mathscr{B}_{\max})$。显然，这些是不同的流形，因为地图册是不同的，但是由于 $\dim \mathbb{R} = 1$，它们必须是微分同胚的。

surgery 理论为维度 $\dim M > 4$ 我们强调维度 $\dim M \neq 4$）的情况提供了答案。这是拓扑中的工具和技术的集合，通过这些工具和技术，可以通过对给定工具和外科工具进行手术，即通过切割，替换和粘合零件，从而控制拓扑不变性（如基本群），从给定工具和工具中获得新的流形。这个想法是通过系统地进行手术来了解所有维度大于 4 的流形。特别地，使用手术理论，已经表明，只能由拓扑流形建立有限多个平滑流形（直至微分同胚）。

这不像前面的例子那样整洁，但是由于只有有限的许多结构，因此我们仍然可以枚举它们，即可以写一个详尽的列表。

对于所有给定的流形来说，尽管找到所有可微结构可能是困难的，但该定理对将时空建模为流形的物理理论具有直接影响。例如，一些物理学家认为，时空应建模为 10 维流形（我们既不提出也不反对这种观点）。如果确实如此，我们需要担心我们为 10 维流形配备哪种可微的结构，因为每个不同的选择都可能导致不同的预测。但是，由于只有有限的许多这样的结构，物理学家至少可以在原则上设计和执行有限的许多实验来区分它们，并确定哪一个是正确的（如果有的话）。

现在我们回到特殊情况 $\dim M = 4$。结果是，如果 M 是一个非紧致的拓扑流形，则可以为 M 配备无数的不可微的光滑结构。特别地，这适用于 $(\mathbb{R}^4, \mathcal{O}_{\text{std}})$。在紧凑的情况下，只有部分结果。

举例来说，这是一个这样的例子结果。

Proposition 7.9. *如果拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$ 的维度为 $\dim M = 4$, 且有 $b_2 > 18$, 其中 b_2 是第二 Betti 数, 那么 $(M, \mathcal{O})$ 可以装备很多不可微光滑结构.*

Betti 数是根据同调群定义的，从直觉上讲:

- b_0 一个空间具有的可连接的群的数量;
- b_1 是空间具有的圆形（一维）孔的数量;

- b_2 是空间中二维孔的数量;

等等。因此，如果一个流形具有多个大于 18 的二维孔，那么我们只能选择数量众多的结构，但它们仍然是无穷多个。

8 张量空间理论 I：域上张量

8.1 向量空间

我们从快速回顾向量空间开始。

Definition. 一个 代数域 *(algebraic field)* 是一个三元有序对 $(K, +, \cdot)$, 其中 K 是一个集合并且 $+, \cdot$ 是 $K \times K \to K$ 满足以下公理的一个映射:

- $(K, +)$ 是一个阿贝尔群, i.e.
  i) $\forall\, a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$;
  ii) $\exists\, 0 \in K : \forall\, a \in K : a + 0 = 0 + a = a$;
  iii) $\forall\, a \in K : \exists\, {-a} \in K : a + (-a) = (-a) + a = 0$;
  iv) $\forall\, a, b \in K : a + b = b + a$;
- $(K^*, \cdot)$, 其中 $K^* := K \setminus \{0\}$, 是一个阿贝尔群, i.e.
  v) $\forall\, a, b, c \in K^* : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
  vi) $\exists\, 1 \in K^* : \forall\, a \in K^* : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
  vii) $\forall\, a \in K^* : \exists\, a^{-1} \in K^* : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$;
  viii) $\forall\, a, b \in K^* : a \cdot b = b \cdot a$;
- 映射 $+$ 和 $\cdot$ 满足分配律:
  ix) $\forall\, a, b, c \in K : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Remark 8.1. 在上面的定义中，为清楚起见，我们包括了公理 iv，但实际上可以从其他几条公理开始进行证明。

Remark 8.2. 我们稍后会遇到的一个较弱的概念是环 *(ring)*。这也被定义为三元有序对 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$，但是它不需要公理 vi，vii 和 viii。如果环满足公理 vi，则称为单元环 *(unital ring)*，如果满足公理 vii，则称为可交换环 *(commutative ring)*。我们将主要考虑单元环，称其为环。

Example 8.3. 三元有序对 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 是可交换的整数环。但是，它不是域，因为 1 和 -1 是整数环中仅有的两个在乘法下存在逆元的元素。

Example 8.4. 集合 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 是使用 $+$ 和 $\cdot$ 运算的常用域.

Example 8.5. 非交换环的一个例子是在常规运算下，实数 $m \times n$ 矩阵 $M_{m\times n}(\ R)$ 的集合。

Definition. 假设 $(K, +, \cdot)$ 为一个域。K-向量空间 *(-vector space)* 或K 上向量空间 *vector space over* K 是三元有序对 $(V, \oplus, \odot)$，其中 V 是集合, 并且

$$\oplus \colon V \times V \to V$$
$$\odot \colon K \times V \to V$$

是满足以下公理的映射:

- $(V, \oplus)$ 是一个阿贝尔群;
- 映射 $\odot$ 是域 K 在线性空间 $(V, \oplus)$ 上的一个作用 *(action)* :
  i) $\forall\, \lambda \in K : \forall\, v, w \in V : \lambda \odot (v \oplus w) = (\lambda \odot v) \oplus (\lambda \odot w)$;
  ii) $\forall\, \lambda, \mu \in K : \forall\, v \in V : (\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v)$;
  iii) $\forall\, \lambda, \mu \in K : \forall\, v \in V : (\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v)$;
  iv) $\forall\, v \in V : 1 \odot v = v$.

向量空间也称为线性空间。它们的元素称为向量 *(vectors)*，而 K 的元素通常称为标量 *(scalars)*，而映射 $\odot$ 被称为标量乘法 *(scalar multiplication)*。您应该已经熟悉线性代数课程中的各种矢量空间构造。例如，回想一下：

Definition. 令 $(V,\oplus,\odot)$ 为 K 上的向量空间,令 $U\subseteq V$ 为非空集。那么我们说 $(U,\oplus|_{U\times U},\odot|_{K\times U})$ 是 $(V,\oplus,\odot)$ 的向量子空间 *(vector subspace)*，如果：

i) $\forall\, u_1,u_2\in U: u_1\oplus u_2\in U$;

ii) $\forall\, u\in U:\forall\,\lambda\in K:\lambda\odot u\in U$.

更简洁地, 如果 $\forall\, u_1,u_2\in U:\forall\,\lambda\in K:(\lambda\odot u_1)\oplus u_2\in U$.

还记得如果在域 K 上我们有 n 个向量空间，我们可以通过定义运算 $\oplus$ 和 $\odot$ 构造其基础集合的 n 重笛卡尔积，并使其成为一个域 K 上的向量空间。

到目前为止，我们将像往常一样查看向量空间之间的保构的映射。

Definition. 令 $(V,\oplus,\odot)$, $(W,\boxplus,\boxdot)$ 为同一域 K 上的向量空间并令 $f\colon V\to W$ 为一映射. 我们称 f 是一个线性映射 *(linear map)* 如果对于 $v_1,v_2\in V$ 和所有的 $\lambda\in K$

$$f((\lambda\odot v_1)\oplus v_2)=(\lambda\boxdot f(v_1))\boxplus f(v_2).$$

从现在开始，我们将取消向量空间运算的特殊表示法，并禁止点用于标量乘法。例如，我们将上面的等式写为 $f(\lambda v_1+v_2)=\lambda f(v_1)+f(v_2)$, 希望这不会引起任何混淆

Definition. 双线性映射称为向量空间的 线性同构 *(linear isomorphism)*. 两个向量空间被称为同构的 *(isomorphic)* 如果它们之间存在线性同构。记作 $V\cong_{\mathrm{vec}}W$.

Remark 8.6. 请注意，与拓扑空间不同，双射线性映射的逆是自动线性的，因此我们不需要在线性同构的定义中指定它。

Definition. 令 V 和 W 为同一域 K 上的向量空间. 定义集合

$$\mathrm{Hom}(V,W):=\{f\mid f\colon V\xrightarrow{\sim}W\},$$

其中符号 $f\colon V\xrightarrow{\sim}W$ 表示 "f 是一个从 V 到 W 的线性映射".

态射集 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 本身可以通过定义成域 K 上的向量空间:

$$\begin{aligned}\oplus\colon \mathrm{Hom}(V,W)\times\mathrm{Hom}(V,W)&\to\mathrm{Hom}(V,W)\\(f,g)&\mapsto f\oplus g\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}f\oplus g\colon V&\xrightarrow{\sim}W\\v&\mapsto(f\oplus g)(v):=f(v)+g(v),\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\odot\colon K\times\mathrm{Hom}(V,W)&\to\mathrm{Hom}(V,W)\\(\lambda,f)&\mapsto\lambda\odot f\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\lambda\odot f\colon V&\xrightarrow{\sim}W\\v&\mapsto(\lambda\odot f)(v):=\lambda f(v).\end{aligned}$$

很容易检查 $f\oplus g$ 和 $\lambda\odot f$ 确实是从 V 到 W 的线性映射。例如，我们有：

$$\begin{aligned}(\lambda\odot f)(\mu v_1+v_2)&=\lambda f(\mu v_1+v_2) &&(\text{由定义})\\&=\lambda(\mu f(v_1)+f(v_2)) &&(\ f\ \text{是线性的})\\&=\lambda\mu f(v_1)+\lambda f(v_2) &&(\text{公理 i 和公理 iii})\\&=\mu\lambda f(v_1)+\lambda f(v_2) &&(\ K\text{是一个域}\ )\\&=\mu(\lambda\odot f)(v_1)+(\lambda\odot f)(v_2)\end{aligned}$$

因此，$\lambda\odot f\in\mathrm{Hom}(V,W)$。还应该检查 $\oplus$ 和 $\odot$ 是否满足向量空间公理。

Remark 8.7. 注意，在向量空间的定义中，没有一个公理要求 K 必须是域。事实上，只要一个环就足够了。环上的向量空间，有自己的名字。它们被称为一个环上的模，我们稍后会遇到它们。

目前，值得指出的是，到目前为止我们所做的一切都同样适用于一个环上的模，包括 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 的定义。但是，如果我们试图将 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 放入一个模，我们就会遇到麻烦。注意，在上面的推导中，我们使用了一个事实，一个域中的乘法是可交换的。但在环中通常不是这样的。

以下是常用的术语。

Definition. 设 V 为一个向量空间. V 的一个 *内同态 (Endomorphism)* 是一个到自身的线性映射 (a linear map) $V \to V$. 我们记 $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$.

Definition. 设 V 是一个向量空间。V 的一个 *自同构 (automorphism)* 是一个到自身的线性同构 (a linear isomorphism) $V \to V$. 我们记 $\mathrm{Aut}(V) := \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ is an isomorphism}\}$.

Remark 8.8. 注意，与 $\mathrm{End}(V)$ 不同，$\mathrm{Aut}(V)$ 不是一个向量空间，就像在课堂上说的那样。它不过是一组在复合操作下的线性映射。

Definition. 设 V 是域 K 上的一个向量空间。V 的一个 *对偶 (dual)* 是

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, K),$$

其中对偶空间的域仍是 K .

V 的对偶向量空间是从 V 到域 K 的线性映射的向量空间，它们分别称为*线性函数*，*协向量 (covectors)* 或 *1-形式 (one-forms)* 在 V 上。对偶扮演一个非常重要的角色，因为我们将从向量空间及其对偶构成张量积。

8.2 张量和张量空间

Definition. 设 V, W, Z 为域 K 上的向量空间. 一个映射 $f \colon V \times W \to Z$ 被称为为 *双线性的 (bilinear)*, 如果

- $\forall\, w \in W : \forall\, v_1, v_2 \in V : \forall\, \lambda \in K : f(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda f(v_1, w) + f(v_2, w)$;
- $\forall\, v \in V : \forall\, w_1, w_2 \in W : \forall\, \lambda \in K : f(v, \lambda w_1 + w_2) = \lambda f(v, w_1) + f(v, w_2)$;

换句话说, 对于任何固定的 v，如果将 $v \mapsto f(v, w)$，和 $w \mapsto f(v, w)$，对于任何固定的 v，都是线性的，就像映射 $V \to Z$ 和 $W \to Z$ 一样。

Remark 8.9. 将其与线性映射的定义进行比较 $f \colon V \times W \xrightarrow{\sim} Z$:

$$\forall\, x, y \in V \times W : \forall\, \lambda \in K : f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

更具体地, 如果 $x = (v_1, w_1)$ 并且 $y = (v_2, w_2)$, 则:

$$f(\lambda(v_1, w_1) + (v_2, w_2)) = \lambda f((v_1, w_1)) + f((v_2, w_2)).$$

一个 $V \times W$ 的双线性映射与 is $V \times W$ 的一个线性映射*不同*. 实际上，双线性只是一种特殊的非线性。

Example 8.10. 由 $(x, y) \mapsto x + y$ 给定的映射 $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是线性的但不是双线性的, 同时映射 $(x, y) \mapsto xy$ 是双线性但不是线性的.

我们可以立即概括上述内容，以从向量空间的笛卡尔积中定义*多重线性 (multilinear)* 映射。

Definition. 设 V 是域 K 上的一个向量空间。一个 T 在 V 上的 (p, q) *型张量 (-tensor)* 是一个线性映射

$$T \colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ copies}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ copies}} \to K.$$

我们记

$$T^p_q V := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ copies}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q \text{ copies}} := \{T \mid T \text{ is a } (p, q)\text{-tensor on } V\}.$$

Definition. 一个 $(p,0)$ 型张量被称为协变 p-张量 *(covariant p-tensor)*, 同时一个 $(0,q)$ 型张量是被称为 逆变 q-张量 *(contravariant q-tensor)*.

Remark 8.11. 按照惯例，V 上的 $0,0$ 只是 K 的元素，并且 $T^0_0V=K$.

Remark 8.12. 请注意，要将 T^p_qV 定义为一个集合，我们应该小心并使用受限理解的原理 (分离公理属性)，即我们应该说出 T_s 的来源。通常，假设我们要构建满足某些属性 p 的映射 $f\colon A\to B$ 的一个集合。回想一下，符号 $f\colon A\to B$ 隐藏了一个事实，即关系（实际上是函数关系），而 A 和 B 之间的一个关系是 $A\times B$ 的子集。因此, 我们应该写成：

$$\{f\in\mathcal{P}(A\times B)\mid f\colon A\to B \text{ and } p(f)\}.$$

对于 T^p_qV，我们有：

$$T^p_qV:=\big\{T\in\mathcal{P}\big(\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{p\text{ copies}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{q\text{ copies}}\times K\big)\mid T\text{ is a }(p,q)\text{-tensor on }V\big\},$$

尽管我们不会每次都写下来。

通过定义，可以为集合 T^p_qV 配备 K-向量空间结构

$$\begin{aligned}\oplus\colon T^p_qV\times T^p_qV&\to T^p_qV\\(T,S)&\mapsto T\oplus S\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\odot\colon K\times T^p_qV&\to T^p_qV\\(\lambda,T)&\mapsto \lambda\odot T,\end{aligned}$$

其中 $T\oplus S$ 和 $\lambda\odot T$ 是按点定义的, 就像我们对 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 所做的那样.

现在，我们定义一种从两个给定张量中获取新张量的重要方法。

Definition. 设 $T\in T^p_qV$, $S\in T^r_sV$.T 和 S 的 张量积 *(tensor product)* 是张量 $T\otimes S\in T^{p+r}_{q+s}V$ 有如下定义:

$$\begin{aligned}(T\otimes S)(\omega_1,\dots,\omega_p,\omega_{p+1},\dots,\omega_{p+r},v_1,\dots,v_q,v_{q+1},\dots,v_{q+s})&\\:=T(\omega_1,\dots,\omega_p,v_1,\dots,v_q)\,S(\omega_{p+1},\dots,\omega_{p+r},v_{q+1},\dots,v_{q+s}),&\end{aligned}$$

其中 $\omega_i\in V^*$ 且 $v_i\in V$.

以下是一些有序的例子。

Example 8.13. a) $T^0_1V:=\{T\mid T\colon V\xrightarrow{\sim}K\}=\mathrm{Hom}(V,K)=:V^*$. 请注意，此处的多重线性与线性相同，因为映射仅具有一个自变量。

b) $T^1_1V\equiv V\otimes V^*:=\{T\mid T\text{ is a bilinear map }V^*\times V\to K\}$. 我们声称这与 $\mathrm{End}(V^*)$ 是相同的. 事实上, 给定 $T\in V\otimes V^*$, 我们可以构造 $\widehat{T}\in\mathrm{End}(V^*)$ 如下所示:

$$\begin{aligned}\widehat{T}\colon V^*&\xrightarrow{\sim}V^*\\\omega&\mapsto T(-,\omega)\end{aligned}$$

对于任何固定的 ω,，我们有

$$\begin{aligned}T(-,\omega)\colon V&\xrightarrow{\sim}K\\v&\mapsto T(v,\omega).\end{aligned}$$

$\widehat{T}$ 和 $T(-,\omega)$ 的线性都直接来自 T 的双线性。因此，对于所有的 ω, 和 $\widehat{T}\in\mathrm{End}(V^*)$ 中的 $T(-,\omega)\in V^*$. 该对应关系是可逆的，因为可以通过定义从 $\widehat{T}$ 的以下定义来重新定义 T :

$$\begin{aligned}T\colon V\times V^*&\to K\\(v,\omega)&\mapsto T(v,\omega):=(\widehat{T}(\omega))(v).\end{aligned}$$

该对应关系实际上是线性的，因此是同构的，因此

$$T^1_1 V \cong_{\text{vec}} \text{End}(V^*).$$

我们想考虑的其他例子是

c) $T^0_1 V \overset{?}{\cong}_{\text{vec}} V$: 虽然您会在某些物理教科书中发现这一说法是正确的，但这实际上，通常情况并非如此；

d) $T^1_1 V \overset{?}{\cong}_{\text{vec}} \text{End}(V)$: 通常来说，这也不是正确的。

e) $(V^*)^* \overset{?}{\cong}_{\text{vec}} V$: 仅在 V 是有限维的情况下成立。

维度的定义取决于基的概念。给定一个向量空间而没有任何其他结构，我们可以定义的唯一基础概念是所谓的 Hamel 基。

Definition. 设 $(V, +, \cdot)$ 为域 K 上的一个向量空间. 一个子集 $\mathcal{B} \subseteq V$ 被称为 V 的一个 哈梅尔基 *(Hamel basis)* 如果

- 集合 $\mathcal{B}$ 的每个有限子集 $\{b_1, \dots, b_N\}$ 是线性独立的, 也就是说

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda^i b_i = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^1 = \cdots = \lambda^N = 0;$$

- 集合 $\mathcal{B}$ 是向量空间 V 的一个 生成 *(generating)* 或 张成集 *(spanning set)* , 也就是说

$$\forall\, v \in V : \exists\, v^1, \dots, v^M \in K : \exists\, b_1, \dots, b_M \in \mathcal{B} : v = \sum_{i=1}^{M} v^i b_i.$$

Remark 8.14. 我们可以通过定义更简洁地写第二个条件

$$\text{span}_K(\mathcal{B}) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda^i b_i \;\middle|\; \lambda^i \in K \wedge b_i \in \mathcal{B} \wedge n \geq 1 \right\}$$

因此 $V = \text{span}_K(\mathcal{B})$.

Remark 8.15. 请注意，我们一直在为 K 的元素使用上标，并且不应将它们与指数混淆。

哈梅尔基的以下表征通常是有用的。

Proposition 8.16. *设 V 为向量空间，令 $\mathcal{B}$ 为 V 的 Hamel 基。那么 $\mathcal{B}$ 是 V 的最小张成 (minimal spanning) 和最大无关子集 (maximal independent subset)，即，如果 $S \subseteq V$，则*

- $\text{span}(S) = V \;\Rightarrow\; |S| \geq |\mathcal{B}|$;
- *S 是线性无关的* $\;\Rightarrow\; |S| \leq |\mathcal{B}|$.

Definition. 设 V 为一向量空间。V 的 维度 *(dimension)* 是 $\dim V := |\mathcal{B}|$, 其中 $\mathcal{B}$ 是 V 的 Hamle 基.

即使我们不会证明它，也存在这样的情况，即给定向量空间的每个 Hamel 基都具有相同的基数，因此维的概念是明确定义的。

Proposition 8.17. *如果 $\dim V < \infty$ 且 $S \subseteq V$, 则有如下性质:*

- *如果 $\text{span}_K(S) = V$ 且 $|S| = \dim V$, 则 S 是 V 的一个 Hamle 基;*
- *如果 S 是线性无关的且 $|S| = \dim V$, 则 S 是 V 的一个 Hamle 基.*

Theorem 8.18. *如果 $\dim V < \infty$, 则 $(V^*)^* \cong_{\text{vec}} V$.*

Sketch of proof(证明草稿). 如下构造显式同构。定义 *评估映射 (evaluation map)* 如下

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}\colon V &\xrightarrow{\sim} (V^*)^* \\ v &\mapsto \mathrm{ev}_v \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_v\colon V^* &\xrightarrow{\sim} K \\ \omega &\mapsto \mathrm{ev}_v(\omega) := \omega(v) \end{aligned}$$

ev 的线性直接来自于 V^* 元素的线性，而 ev_v 的线性则来自于 V^* 是矢量空间这一事实。然后表明 ev 既是单射的又是满射的，因此是同构的。 □

Remark 8.19. 请注意，尽管我们需要基数的概念来陈述这个结果（因为我们需要 $\dim V < \infty$），但是我们构造的同构与基数的任何选择无关。

Remark 8.20. 不难证明 $(V^*)^* \cong_{\text{vec}} V$ 意味着 $T^0_1 V \cong_{\text{vec}} V$ and $T^1_1 V \cong_{\text{vec}} \mathrm{End}(V)$. 因此，最后两个保持有限的维度，但它们不必保持无限的维度。

Remark 8.21. 尽管选择基通常可以简化事情，但是在定义新对象时，重要的是不要参考基。如果我们确实根据基（例如向量空间的维数）来定义事物，则我们必须检查事物是否定义明确，即它不取决于我们选择的基。有人说 "*绅士只有在必要时才选择基。*"

如果 V 是有限维的, 则 V^* 也是有限维的并且 $V \cong_{\text{vec}} V^*$. 此外，给定 V 的基 $\mathcal{B}$，存在与 $\mathcal{B}$ 相关的 V^* 空间的基。

Definition. 令 V 为具有基 $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_{\dim V}\}$ 的有限维向量空间。$\mathcal{B}$ 的*对偶基 (dual basis)* 是 V^* 唯一的基 $\mathcal{B}' = \{f^1, \ldots, f^{\dim V}\}$ of V^* 使得

$$\forall\, 1 \le i, j \le \dim V: \quad f^i(e_j) = \delta^i_j := \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Remark 8.22. 如果 V 是有限维的，则 V 对 V^* 和 $(V^*)^*$ 同构。在 V^* 的情况下，通过将 V 的基 $\mathcal{B}$ 的每个元素对应到对偶基 $\mathcal{B}'$ 中的另一个元素来给出同构，并且然后线性扩展到 V。

您将（可能已经知道）了解到向量空间*规范地 (canonically)* 与它的*双对偶同构*，而与它的对偶是*不规范同构的*，因为为了提供同构, 必须取决于 V 基的选择

对此问题的正确处理属于*范畴理论 (category theory)* 的范围，相关概念称为*自然同构 (natural isomorphism)*。有关该主题的介绍，请参见例如汤姆 • 伦斯特（Tom Leinster）撰写的 *Basic Category Theory*。

一旦有了基 $\mathcal{B}$，就 $\mathcal{B}$ 的元素而言，$v \in V$ 的扩展实际上是唯一的。因此，我们可以在 $\mathcal{B}$ 的基础上有意义地谈论 v 的*分量 (components)*。坐标的概念也可以推广到张量的情况。

Definition. 设 V 为 K 上的有限维向量空间，基为 $\mathcal{B} = \{e_1 \;\ldots\; e_{\dim V}\}$，并设 $T \in T^p_q V$。我们将以$\mathcal{B}$ 为基的T 的*分量 (components)* 定义为数字

$$T^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q} := T(f^{a_1}, \ldots, f^{a_p}, e_{b_1}, \ldots, e_{b_q}) \in K,$$

其中 $1 \le a_i, b_j \le \dim V$, 且 $\{f^1, \ldots, f^{\dim V}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的对偶基.

就像矢量一样，分量完全决定了张量。事实上，我们可以使用基从张量的分量重建张量：

$$T = \underbrace{\sum_{a_1=1}^{\dim V} \cdots \sum_{b_q=1}^{\dim V}}_{p+q \text{ sums}} T^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q} e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_p} \otimes f^{b_1} \otimes \cdots \otimes f^{b_q},$$

其中 e_{a_i} 被理解为 $T^1_0 V \cong_{\text{vec}} V$ 的元素，而 f^{b_i} 被理解为 $T^0_1 V \cong_{\text{vec}} V^*$ 的元素。注意，请注意，每个被加数都是一个 (p, q)-张量，而分量和张量乘积之间的 (隐式) 乘法是在 $T^p_q V$ 中的标量乘法。

8.2.1 基矢变换

设 V 是 K 上的向量空间，其中 $d = \dim V < \infty$，并设 $\{e_1 \ldots, e_d\}$ 是 V 的基。考虑一个新的基 $\{\widetilde{e}_1 \ldots \widetilde{e}_d\}$。由于新基的元素也是$V$ 的元素，我们可以用旧基来展开它们。我们有:

$$\widetilde{e}_i = \sum_{j=1}^{d} A^j{}_i \, e_j \qquad \text{for } 1 \leq i \leq d.$$

对于一些 $A^j{}_i \in K$. 类似地, 我们有

$$e_i = \sum_{j=1}^{d} B^j{}_i \, \widetilde{e}_j \qquad \text{for } 1 \leq i \leq d.$$

一些 $B^j{}_i \in K$。这是一个标准的线性代数结果，元素为 $A^j{}_i$ 和 $B^j{}_i$ 矩阵 A 和 B 是可逆的，事实上，$A^{-1} = B$。

8.3 符号约定

爱因斯坦求和约定

从现在开始，我们将采用爱因斯坦的求和惯例，即当要求和的指标在同一项中分别出现一次作为下标，和一次作为上标时，取消求和符号。例如，我们写道

$$v = v^i e_i \qquad \text{and} \qquad T = T^{ij}{}_k e_i \otimes e_j \otimes f^k$$
$$\text{instead of}$$
$$v = \sum_{i=1}^{d} v^i e_i \qquad \text{and} \qquad T = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} T^{ij}{}_k e_i \otimes e_j \otimes f^k.$$

求和后的指标称为伪指标 *(dummy indices)*; 它们总是成对出现，显然，我们选择哪个特定字母来表示它们并不重要，只要它还没有出现在表达式中。未求和的指标称为自由指标；包含自由指标的表达式表示多个表达式，每个自由索引的值对应一个表达式；自由指标必须在等式的两边都匹配。例如

$$v^i e_i = v^k e_k, \qquad T^{ij}{}_k = T^{imj}{}_{km}, \qquad A_{ij} = C_k C^k B_{ij} + C_i C^k B_{kj}$$

所有的表达式都是有效的。而

$$c^k v^i e_i = c^k v^k e_k, \qquad T^{ij}{}_j = T^{imj}{}_{km}, \qquad A_{ij} = C_k C^k + C_i C^l B_{lj}$$

是无效的表达式。指标运行的范围通常是可以理解的，而不是写出来的。

哪些指标是上标，哪些指标是下标 (我们已经用过了) 的约定是:

- V 的基向量带下标;
- V^* 的基向量上标;
- 所有其他的位置都由爱因斯坦的求和约定确定。

例如，由于一个向量的分量必须乘上基向量并对其求和，爱因斯坦的求和约定要求它们带有上标。

Example 8.23. 使用求和约定，我们有:

a) $f^a(v) = f^a(v^b e_b) = v^b f^a(e_b) = v^b \delta^a_b = v^a$;

b) $\omega(e_b) = (\omega_a f^a)(e_b) = \omega_a f^a(e_b) = \omega_b$;

c) $\omega(v) = \omega_a f^a(v^b e_b) = \omega_a v^a$;

其中 $v \in V$, $\omega \in V^*$, $\{e_i\}$ 是 V 的一个基, 且 $\{f^j\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶基.

Remark 8.24. 爱因斯坦的求和约定应该只在处理线性空间和多线性映射时使用。原因如下。考虑一个映射 $\phi\colon V\times W\to Z$, 并令 $v=v^ie_i\in V$ 和 $w=w^i\widetilde{e}_i\in W$. 于是我们有:

$$\phi(v,w)=\phi\left(\sum_{i=1}^{d}v^ie_i,\sum_{j=1}^{\widetilde{d}}w^j\widetilde{e}_j\right)=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\widetilde{d}}\phi(v^ie_i,w^j\widetilde{e}_j)=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{\widetilde{d}}v^iw^j\phi(e_i,\widetilde{e}_j).$$

注意，通过抑制灰色的求和符号，上面的第二项和第三项是无法区分的。但这只有在 ϕ 是双线性的情况下才成立! 因此，求和约定不应该在数学的其他领域中使用 (至少，不是没有额外的注意)。

Remark 8.25. 在选择了 V 的基数和 $V*$ 的对偶基之后，很容易将 $v=v^ie_i\in V$ 和 $\omega=\omega_if^i\in V^*$ 认为是数字的 d 元组。为了区分它们，可以选择将向量写成分量数字的一列，将余向量写成分量数字的一行：在选择了 V 的一组基和 V^* 的对偶基之后，很容易把 $V=V^ie_i\in V$ 中的值和 $\omega=\omega_if^i\in V^*$ 中的值看作 d-元组。为了区分它们，我们可以选择将向量写成数字的“列”，将协向量写成数字的“行”：

$$v=v^ie_i\quad\rightsquigarrow\quad v\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^d\end{pmatrix}$$

和

$$\omega=\omega_if^i\quad\rightsquigarrow\quad\omega\mathrel{\hat{=}}(\omega_1,\dots,\omega_d).$$

给定 $\phi\in\mathrm{End}(V)\cong_{\mathrm{vec}}T^1_1V$, 回想一下，我们可以写为 $\phi=\phi^i{}_j\,e_i\otimes f^j$, 其中 $\phi^i{}_j:=\phi(f^i,e_j)$ 是 ϕ 分别对应所选择的基的分量. 因此，很容易把 ϕ 看作是一个数字的正方形数组:

$$\phi=\phi^i{}_j\,e_i\otimes f^j\quad\rightsquigarrow\quad\phi\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}\phi^1{}_1&\phi^1{}_2&\cdots&\phi^1{}_d\\ \phi^2{}_1&\phi^2{}_2&\cdots&\phi^2{}_d\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \phi^d{}_1&\phi^d{}_2&\cdots&\phi^d{}_d\end{pmatrix}$$

这里的惯例是考虑 i 指标 $\phi^i{}_j$ 作为一个 行指标 *(row index)*, 和 j 作为一个 列指标 *(column index)*.

我们再怎么强调这是纯粹的惯例也不为过。它的有用性源于下面的例子。

Example 8.26. 如果 $\dim V<\infty$, 则我们有 $\mathrm{End}(V)\cong_{\mathrm{vec}}T^1_1V$. 具体地说, 如果 $\phi\in\mathrm{End}(V)$, 我们可以考虑 $\phi\in T^1_1V$, 使用同样的标记, 例如

$$\phi(\omega,v):=\omega(\phi(v)).$$

因此 $\phi\in\mathrm{End}(V)$ 的分量是 $\phi^a{}_b:=f^a(\phi(e_b))$.

现在考虑 $\phi,\psi\in\mathrm{End}(V)$. 我们来确定 $\phi\circ\psi$ 的分量. 我们有:

$$\begin{aligned}(\phi\circ\psi)^a{}_b&:=(\phi\circ\psi)(f^a,e_b)\\&:=f^a((\phi\circ\psi)(e_b))\\&=f^a((\phi(\psi(e_b)))\\&=f^a(\phi(\psi^m{}_b\,e_m))\\&=\psi^m{}_bf^a(\phi(e_m))\\&:=\psi^m{}_b\,\phi^a{}_m.\end{aligned}$$

最后一行中的乘法是域 K 中的乘法，因为它是可交换的，所以我们有 $\psi^m{}_m\,\phi^a{}_m=\phi^a{}_m\,\psi^m{}_b$。但是，根据前一评论中所介绍的公约，最好是后者。事实上，如果我们把上标看作行指标，下标看作列指标，那么 $\phi^a{}_m\,\psi^m{}_b$ 就是矩阵乘积 $\phi\psi$ 在行 a，列 b 中的条目。

类似地, $\omega(v)=\omega_mv^m$ 可被考虑点积点积 *(dot product)* 为 $\omega\cdot v\equiv\omega^Tv$, 并且

$$\phi(v,w)=w_a\,\phi^a{}_b\,v^b\quad\rightsquigarrow\quad\omega^T\phi v.$$

最后一个表达式可能会误导你认为转置是一个“好”的概念，但事实上它不是。这是个很糟糕的符号。它似乎是独立基底的，但实际上根本不是。

这个故事的寓意是, 你应该尽你最大努力不要把向量, 协向量和张量看作为数组的数据。相反，总是尝试从抽象的、内在的、无分量的角度来理解它们。

分量在基变换下的变换

回忆如果 $\{e_a\}$ 和 $\{\widetilde{e}_a\}$ 是 V 的基, 我们有

$$\widetilde{e}_a = A^b{}_a e_b \qquad \text{and} \qquad e_a = B^m{}_a \widetilde{e}_m,$$

其中 $A^{-1} = B$. 请注意，在指标符号中，方程 $AB = I$ 写作 $A^a{}_m B^m{}_b = \delta^a_b$.

现在我们研究向量和协向量的分量在基改变下如何变化。

a) 设 $v = v^a e_a = \widetilde{v}^a \widetilde{e}_a \in V$. 则有:

$$v^a = f^a(v) = f^a(\widetilde{v}^b \widetilde{e}_b) = \widetilde{v}^b f^a(\widetilde{e}_b) = \widetilde{v}^b f^a(A^m{}_b e_m) = A^m{}_b \widetilde{v}^b f^a(e_m) = A^a{}_b \widetilde{v}^b.$$

b) 设 $\omega = \omega_a f^a = \widetilde{\omega}_a \widetilde{f}^a \in V^*$. 则:

$$\omega_a := \omega(e_a) = \omega(B^m{}_a \widetilde{e}_m) = B^m{}_a \omega(\widetilde{e}_m) = B^m{}_a \widetilde{\omega}_m.$$

总结一下, 对于 $v \in V$, $\omega \in V^*$ 和 $\widetilde{e}_a = A^b{}_a e_b$, we have:

$$\begin{aligned} v^a &= A^a{}_b \widetilde{v}^b \qquad & \omega_a &= B^b{}_a \widetilde{\omega}_b \\ \widetilde{v}^a &= B^a{}_b v^b \qquad & \widetilde{\omega}_a &= A^b{}_a \omega_b \end{aligned}$$

张量的结果是以上的组合，具体取决于张量的类型。

c) Let $T \in T^p_q V$. Then:

$$T^{a_1 \dots a_p}{}_{b_1 \dots b_q} = A^{a_1}{}_{m_1} \cdots A^{a_p}{}_{m_p} B^{n_1}{}_{b_1} \cdots B^{n_q}{}_{b_q} \widetilde{T}^{m_1 \dots m_p}{}_{n_1 \dots n_q},$$

即, 上指标像矢量指标一样转换，下指标像协向量指标一样转换。

8.4 行列式

在上一门有关线性代数的课程中，您可能已经遇到过平方矩阵的行列式，即通过应用神秘规则计算得出的数字。使用神秘的规则，您可能已经通过大量的工作表明，例如，如果我们交换两行或两列，行列式将改变符号。但是，正如我们已经看到的，矩阵是纯约定的结果。因此，有必要再进行一次辩论。

Remark 8.27. 回想一下，如果 $\phi \in T^1_1 V$, 然后我们可以以矩阵形式安排分量 $\phi^a{}_b$:

$$\phi = \phi^a{}_b \, e_a \otimes f^b \quad \rightsquigarrow \quad \phi \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \phi^1{}_1 & \phi^1{}_2 & \cdots & \phi^1{}_d \\ \phi^2{}_1 & \phi^2{}_2 & \cdots & \phi^2{}_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^d{}_1 & \phi^d{}_2 & \cdots & \phi^d{}_d \end{pmatrix}$$

类似地, 如果我们有 $g \in T^0_2 V$, 它的分量是 $g_{ab} := g(e_a, e_b)$ 并且我们可以写作:

$$g = g_{ab} \, f^a \otimes f^b \quad \rightsquigarrow \quad g \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1d} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{d1} & g_{d2} & \cdots & g_{dd} \end{pmatrix}$$

不用说，如果尝试这两个对象，它们不会有更多不同。确实

- ϕ 是 V 的内同态（endomorphism）; ${\phi^a}_b$ 中的第一个指标像矢量指标一样转换，而第二个指标像协指标一样转换；
- g 是 V 上的 双线性形式 *(bilinear form)*；g_{ab} 中的两个指标都像协向量指标一样进行变换。

在线性代数中，您可能已经看到这些对象的两种不同的变换定律：

$$\phi \to A^{-1}\phi A \qquad \text{and} \qquad g \to A^T g A,$$

其中 A 是基矩阵的变化。但是，一旦确定了基，这两个对象的矩阵表示就无法区分。因此，很容易想到我们可以对一个矩阵进行处理，而我们可以轻松地对另一个矩阵进行处理。例如，如果我们有一个规则来计算平方矩阵的行列式，则我们应该能够将其应用于上述两个矩阵。

然而，行列式的概念是只为内同态定义的。了解这一点的唯一方法是给出一个与基无关的定义，即一个不涉及“矩阵分量”的定义。

我们将需要一些初步的定义。

Definition. 设 M 为一个集合.M 的一个 置换 *(permutation)* 是一个双射 $M \to M$.

Definition. 顺序为 n 的对称群表示为 S_n，是符合函数下 $\{1\ \ldots\ n\}$ 的一组排列。

Definition. 换位 *(transposition)* 是交换两个元素，并保持所有其他元素固定的置换。

Proposition 8.28. S_n 中的每个置换 π 都可以写成 S_n 中换位的乘积（组合）。

虽然此分解不是唯一的，但对于 S_n 中的每个给定 π，分解中的换位次数始终为偶数或奇数。因此，我们可以 S_n 中 π 的符号 *(sign)*（或签名 *(signature)*）定义为

$$\operatorname{sgn}(\pi) := \begin{cases} +1 & \text{如果 } \pi \text{ 是偶数个换位的乘积} \\ -1 & \text{如果 } \pi \text{ 是奇数个换位的乘积。.} \end{cases}$$

Definition. 设 V 为一个 d-维向量空间. V 上的 n-形式是 $(0, n)$ 张量 ω，即完全反对称，即

$$\forall \pi \in S_n:\ \omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \operatorname{sgn}(\pi)\,\omega(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(n)}).$$

请注意，0− 形式是标量，1− 形式是向量。d− 形式也称为最佳形式 *(top form)*。n 形式有几个等效定义。例如，我们有以下内容。

Proposition 8.29. *A* $(0, n)$-张量 ω 是一个 n-形式, 当且仅当, $\omega(v_1, \ldots, v_n) = 0$ 是 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 是线性无关的.

虽然当 $n > d$ 时 $T^0_n V$ 当然是非空的，但该命题立即意味着，任何具有 $n > d$ 的 n 形式都必须相同地为零。这是因为从 d 维向量空间收集超过 d 个向量必然是线性相关的。

Proposition 8.30. 用 $\Lambda^n V$ 表示 V 上 n-形式的向量空间。那我们有

$$\dim \Lambda^n V = \begin{cases} \binom{d}{n} & \text{如果 } 1 \le n \le d \\ 0 & \text{如果 } n > d, \end{cases}$$

其中 $\binom{d}{n} = \frac{d!}{n!(d-n)!}$ 是二项式系数，读为 “d 选择 n”。

特别地, $\dim \Lambda^d V = 1$. 这意味着

$$\forall\, \omega, \omega' \in \Lambda^d V : \exists\, c \in K:\ \omega = c\,\omega',$$

换句话说, 在 V 上，基本上只有一个顶形式，最多一个标量因子。

Definition. 在 V 上选择顶形式称为在 V 上选择体积形式 *(volume form)*。然后将具有选定列形式的矢量空间称为具有体积形式的矢量空间。

该术语归因于下一个定义。

Definition. 令 $\dim V = d$, 令 $\omega \in \Lambda^d V$ 为 V 上的一个体积形式. 给定 $v_1, \ldots, v_d \in V$, 由 $v_1, \ldots, v_d$ 所跨越的体积 *(volume)* 是

$$\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_d) := \omega(v_1, \ldots, v_d).$$

直观地讲，反对称条件 ω 确保只要集合 $\{v_1 \ \ldots \ v_d\}$ 不是线性独立的，则 $\mathrm{vol}(v_1 \ \ldots \ v_d)$ 为零。确实，在那种情况下，$v_1 \ \ldots \ v_d$ 最多只能跨越 (V) 的 $(d-1)$ 维超曲面，其体积应该为 0。

Remark 8.31. 您可能正确地认为，体积的概念在 V 上需要一些额外的结构，例如长度或角度的概念，因此是内部乘积。但是，我们只需要一个顶层形式。

我们终于准备好定义行列式了。

Definition. 设 V 为一个 d-维的向量空间并令 $\phi \in \mathrm{End}(V) \cong_{\mathrm{vec}} T^1_1 V$. ϕ 的 行列式 *(determinant)* 的定义如下

$$\det \phi := \frac{\omega(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_d))}{\omega(e_1, \ldots, e_d)}$$

对于某些体积形式 $\omega \in \Lambda^d V$ 和 V 的某些基 $\{e_1, \ldots, e_d\}$.

我们需要做的第一件事是检查它是否定义明确。显然 $\det \phi$ 与 ω 的选择无关, 因为如果 $\omega, \omega' \in \Lambda^d V$, 则存在 $c \in K$ 使得 $\omega = c\omega'$, 并且因此

$$\frac{\omega(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_d))}{\omega(e_1, \ldots, e_d)} = \frac{\cancel{c}\,\omega'(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_d))}{\cancel{c}\,\omega'(e_1, \ldots, e_d)}.$$

依赖于基础选择的独立性显示起来比较麻烦，但是它确实成立，因此 $\det \phi$ 是明确定义的。

注意 ϕ 必须是一个内同态，因为我们需要将 ω 作用于 $\phi(e_1) \ \ldots \ \phi(e_d)$，因此 ϕ 需要输出一个向量。

当然，在将 ϕ 标识为矩阵的情况下，此定义与行列式的通常定义是一致的，并且可以从中得出关于行列式的所有您喜欢的结果。

Remark 8.32. 在线性代数过程中，您可能已经证明行列式是与基无关的，如下所示：如果 A 表示基矩阵的变化，则

$$\det(A^{-1}\phi A) = \det(A^{-1})\det(\phi)\det(A) = \det(A^{-1}A)\det(\phi) = \det(\phi)$$

由于标量是可交换的，并且 $\det(A^{-1}A) = \det(I) = 1$.

回想一下，双线性形式 g 在基矢变换下的变换规则是 $g \to A^T g A$。然后将 g 的行列式转换为

$$\det(A^T g A) = \det(A^T)\det(g)\det(A) = (\det A)^2 \det(g)$$

即: 在基矢变换下不变。它不是定义明确的对象，因此我们不应使用它。

稍后我们将遇到数量 X 转换为

$$X \to \frac{1}{(\det A)^2} X$$

在变化基上，因此它们的定义也不明确。但是，我们显然有

$$\det(g) X \to \frac{\cancel{(\det A)^2}}{\cancel{(\det A)^2}} \det(g) X = \det(g) X$$

因此产品 $\det(g)X$ 是一个定义明确的对象。看来有两个错误是对的！

为了使这一数学精确，我们将不得不引入主纤维丛 *(principal fibre bundles)*。使用它们，我们将能够给出张量和张量密度 *(tensor densities)* 的丛定义，从广义上说，它们是在基变化下以 $\det A$ 的幂转换的数量。

9 微分结构：切向量空间的关键概念

9.1 切空间与流形

在本节中，每当我们说 “流形” 时，都是指（实数）d 维可微流形，除非我们另外明确指出。我们还将抑制符号中的可微结构。

Definition. 令 M 为流形。我们使用基础集合定义 $\mathbb{R}$ 上的无限维向量空间

$$\mathcal{C}^\infty(M) := \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ 是光滑的}\}$$

和逐点定义的操作，即对于任意 $p \in M$,

$$\begin{aligned}(f+g)(p) &:= f(p) + g(p)\\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p).\end{aligned}$$

例行检查表明这确实是向量空间。我们可以类似地定义 $\mathcal{C}^\infty(U)$, 其中 U 是 M 的一个开子集.

Definition. M 上的一个 *光滑流形 (smooth curve)* 是一个光滑映射 $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$, 其中 $\mathbb{R}$ 可被理解为一个 1 维光滑流形.

此定义也适用于开区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 的光滑映射 $I \to M$.

Definition. 设 $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ 为一个穿过点 $p \in M$ 的光滑曲线; 不失一般性地 (w.l.o.g.) 令 $\gamma(0) = p$. 沿 γ 的点 p 处的 *有向导数算子 (directional derivative operator)* 是线性映射

$$\begin{aligned} X_{\gamma,p}\colon \mathcal{C}^\infty(M) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\\ f &\mapsto (f\circ\gamma)'(0),\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{R}$ 被理解为域 $\mathbb{R}$ 上的 1 维向量空间.

请注意，$f \circ \gamma$ 是映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，因此我们可以计算通常的导数并将其评估为 0。

Remark 9.1. 在微分几何中，$X_{\gamma,p}$ 在点 $p \in M$ 处称为曲线 γ 的*正切向量 (tangent vector)* 正切向量。直观地，$X_{\gamma,p}$ 是在 p 处的速度 γ。考虑曲线 $\delta(t) := \gamma(2t)$，该曲线的参数化速度快两倍。对于任何 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, 我们有:

$$X_{\delta,p}(f) = (f\circ\delta)'(0) = 2(f\circ\gamma)'(0) = 2X_{\gamma,p}(f)$$

通过使用链式规则。因此 $X_{\gamma,p}$ 像速度一样缩放。

Definition. 设 M 为一个流形并且 $p \in M$. 点 p 处对于 M 的*正切空间 (tangent space)* T_pM 是 $\mathbb{R}$ 上基于正切向量 $X_{\gamma,p}$ 组成的集合的向量空间

$$T_pM := \{X_{\gamma,p} \mid \gamma \text{ is a smooth curve through } p\},$$

加法

$$\begin{aligned}\oplus\colon T_pM \times T_pM &\to T_pM\\ (X_{\gamma,p}, X_{\delta,p}) &\mapsto X_{\gamma,p} \oplus X_{\delta,p},\end{aligned}$$

数量乘法

$$\begin{aligned}\odot\colon \mathbb{R} \times T_pM &\to T_pM\\ (\lambda, X_{\gamma,p}) &\mapsto \lambda \odot X_{\gamma,p},\end{aligned}$$

两者都是按点定义的，即对于 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}(X_{\gamma,p} \oplus X_{\delta,p})(f) &:= X_{\gamma,p}(f) + X_{\delta,p}(f)\\ (\lambda \odot X_{\gamma,p})(f) &:= \lambda X_{\gamma,p}(f).\end{aligned}$$

请注意，这些操作的输出的结果看起来不像 T_pM 中的元素，因为对于某些曲线 σ，它们的格式不是 $X_{\sigma,p}$。因此，我们需要证明上述操作实际上是定义明确的。

Proposition 9.2. 令 $X_{\gamma,p}, X_{\delta,p} \in T_pM$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则我们有 $X_{\gamma,p} \oplus X_{\delta,p} \in T_pM$ 和 $\lambda \odot X_{\gamma,p} \in T_pM$.

由于导数是局部概念，因此只有 p 附近的曲线行为才重要。特别是，如果两条曲线 γ 和 δ 在 p 的邻域上一致，则 $X_{\gamma\, p}$ 和 $X_{\delta\, p}$ 是 T_pM。因此，我们可以使用 M 上的图表来局域地 *(locally)* 工作。

Proof. 设 (U, x) 为 M 上的坐标卡, 其中 U 是点 p 的一个邻域.

i) 定义曲线

$$\sigma(t) := x^{-1}((x \circ \gamma)(t) + (x \circ \delta)(t) - x(p)).$$

注意 σ 是光滑的，因为它是通过光滑映射的添加和合成来构造的，而且：

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= x^{-1}(x(\gamma(0)) + x(\delta(0)) - x(p)) \\ &= x^{-1}(x(p)) + x(p) - x(p)) \\ &= x^{-1}(x(p)) \\ &= p.\end{aligned}$$

因此 σ 是通过点 p 的一条光滑曲线. 设 $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ 为任意函数. 则我们有

$$\begin{aligned}X_{\sigma,p}(f) &:= (f \circ \sigma)'(0) \\ &= [f \circ x^{-1} \circ ((x \circ \gamma) + (x \circ \delta) - x(p))]'(0)\end{aligned}$$

其中 $(f \circ x^{-1})\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 并且 $((x \circ \gamma) + (x \circ \delta) - x(p))\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, 因此由多变量链式法则

$$= [\partial_a(f \circ x^{-1})(x(p))]\,((x^a \circ \gamma) + (x^a \circ \delta) - x^a(p))'(0)$$

其中 x^a, 并且 $1 \le a \le d$ 是 x 的分量, 因此导数是线性的

$$\begin{aligned}&= [\partial_a(f \circ x^{-1})(x(p))]\,((x^a \circ \gamma)'(0) + (x^a \circ \delta)'(0)) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma)'(0) + (f \circ x^{-1} \circ x \circ \delta)'(0) \\ &= (f \circ \gamma)'(0) + (f \circ \delta)'(0) \\ &=: (X_{\gamma,p} \oplus X_{\delta,p})(f).\end{aligned}$$

因此 $X_{\gamma,p} \oplus X_{\delta,p} = X_{\sigma,p} \in T_pM$.

ii) 第二部分很简单。定义 $\sigma(t) := \gamma(\lambda t)$. 这再次是通过 p 的平滑曲线，我们有：

$$\begin{aligned}X_{\sigma,p}(f) &:= (f \circ \sigma)'(0) \\ &= f'(\sigma(0))\,\sigma'(0) \\ &= \lambda f'(\gamma(0))\,\gamma'(0) \\ &= \lambda(f \circ \gamma)'(0) \\ &:= (\lambda \odot X_{\gamma,p})(f)\end{aligned}$$

对于任意 $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. 因此 $\lambda \odot X_{\gamma,p} = X_{\sigma,p} \in T_pM$. □

Remark 9.3. 现在，我们给出 T_pM 稍有不同（但等效）的定义。考虑平滑曲线集

$$S = \{\gamma\colon I \to M \mid \text{with } I \subseteq \mathbb{R} \text{ open, } 0 \in I \text{ and } \gamma(0) = p\}$$

并定义等价关系 $\sim$ on S

$$\gamma \sim \delta \;:\Leftrightarrow\; (x \circ \gamma)'(0) = (x \circ \delta)'(0)$$

对于某些（因此每一个）包含 p 的坐标卡 $(U\ x)$。然后，我们可以定义

$$T_pM := S/\sim.$$

9.2 代数和导数

在继续研究切空间的性质之前，我们将先略谈代数和导数。

Definition. 域 K 上的一个 代数 *(algebra)* 是一个四元有序对 $(A, +, \cdot, \bullet)$, 其中 $(A, +, \cdot)$ 是一个 K-向量空间并且 $\bullet$ 是 A 上的一个 乘法 *(product)* , 即一个 $(K\text{-})$ 双线性映射 $\bullet\colon A \times A \to A$.

Example 9.4. 如下定义 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 上的一个乘法

$$\begin{aligned}\bullet\colon \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) &\to \mathcal{C}^\infty(M)\\ (f, g) &\mapsto f \bullet g,\end{aligned}$$

其中 $f \bullet g$ 是逐点定义的. 那么 $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \cdot, \bullet)$ 就是 $\mathbb{R}$ 上的一个代数.

通常的限定词也适用于代数。

Definition. 一个代数 $(A, +, \cdot, \bullet)$ 被称为

i) 乘法结合律 if $\forall v, w, z \in A : v \bullet (w \bullet z) = (v \bullet w) \bullet z$;

ii) 乘法幺元 if $\exists \mathbf{1} \in A : \forall v \in V : \mathbf{1} \bullet v = v \bullet \mathbf{1} = v$;

iii) 乘法交换律或 阿贝尔的如果 $\forall v, w \in A : v \bullet w = w \bullet v$.

Example 9.5. 显然, $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \cdot, \bullet)$ 是一个结合的, 具有单位元的, 交换的代数。

一类重要的代数是所谓的李代数，其中乘积 $v \bullet w$ 通常表示为 $[v\ w]$。

Definition. 一个李代数 *(Lie algebra)* A 是一个代数, 它的乘法 $[-, -]$, 被称为 李括号 *(Lie bracket)*, 满足

i) 反对称性: $\forall v \in A : [v, v] = 0$;

ii) 雅可比恒等式: $\forall v, w, z \in A : [v, [w, z]] + [w, [z, v]] + [z, [v, w]] = 0$.

请注意，上面的零代表 A 中的加法单位元，而不是零标量。

反对称条件立即暗示 $[v, w] = -[w, v]$ 对所有的 $v, w \in A$, 因此（非平凡的）李代数不能是一元的。

Example 9.6. 令 V 为 K 上的向量空间。然后 $(\mathrm{End}(V), +, \cdot, \circ)$ 是 K 上的结合的，有幺元的，非交换代数。定义

$$\begin{aligned}[-, -]\colon \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) &\to \mathrm{End}(V)\\ (\phi, \psi) &\mapsto [\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi.\end{aligned}$$

检查 $(\mathrm{End}(V), +, \cdot, [-, -])$ 是否是 K 上的李代数是有帮助。在这种情况下，Lie 括号通常称为 对易子.

通常，给定一个结合代数 $(A, +, \cdot, \bullet)$, 如果我们定义

$$[v, w] := v \bullet w - w \bullet v,$$

则 $(A, +, \cdot, [-, -])$ 是一个李代数.

Definition. 设 A 为一个代数. A 上的一个 导数 *(derivation)* 是一个满足莱布尼兹法则的线性映射 $D\colon A \xrightarrow{\sim} A$

$$D(v \bullet w) = D(v) \bullet w + v \bullet D(w)$$

for all $v, w \in A$.

Remark 9.7. 可以将导数的定义扩展为包括具有适当结构的映射 $A \to B$。显而易见的第一步是考虑两个代数 $(A, +_A, \cdot_A, \bullet_A)$, $(B, +_B, \cdot_B, \bullet_B)$, 并要求 $D\colon A \xrightarrow{\sim} B$ 满足

$$D(v \bullet_A w) = D(v) \bullet_B w +_B v \bullet_B D(w).$$

但是，这是没有意义的，因为 $\bullet_B\colon B \times B \to B$, 但是在右边 $\bullet_B$ 也作用于 A 中的元素。为了使此功能有效，必须为 B 配备一个由 A 元素组成的乘积，该乘积从左侧和右侧开始。我们正在寻找的结构称为 A 上的双模 *(bimodule)*，我们稍后会介绍。

Example 9.8. 通常的导数运算符是 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ 的导数，后者是光滑实函数的代数，因为它是线性的并且满足 Leibniz 规则。

但是，二阶导数算符不是 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ 的导数，因为它不满足 Leibniz 规则。这表明导数的分量不必是导数。

Example 9.9. 再次考虑李代数 $(\mathrm{End}(V), +, \cdot, [-,-])$ 并取 $\xi \in \mathrm{End}(V)$. 如果我们定义

$$\begin{aligned} D_\xi := [\xi, -] \colon \mathrm{End}(V) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V) \\ \phi &\mapsto [\xi, \phi], \end{aligned}$$

则 D_ξ 是 $(\mathrm{End}(V), +, \cdot, [-,-])$ 上的导数因为它是线性的并且

$$\begin{aligned} D_\xi([\phi,\psi]) &:= [\xi,[\phi,\psi]] \\ &= -[\psi,[\xi,\phi]] - [\phi,[\psi,\xi]] && \text{(由雅各比恒等式)} \\ &= [[\xi,\phi],\psi] + [\phi,[\xi,\psi]] && \text{(由反对称)} \\ &=: [D_\xi(\phi),\psi] + [\phi, D_\xi(\psi)]. \end{aligned}$$

这种构造也适用于一般的李代数。

Example 9.10. 我们用 $\mathrm{Der}_K(A)$ 表示 K 代数 $(A, +, \cdot, \bullet)$ 的导数集合。通过逐点定义定义运算，可以赋予此集合 K-向量空间结构，但是，在前面的示例中，不能根据导数的分量将其设置为代数。

但是，导数是映射，因此我们仍然可以将它们复合成映射并定义

$$\begin{aligned} [-,-] \colon \mathrm{Der}_K(A) \times \mathrm{Der}_K(A) &\to \mathrm{Der}_K(A) \\ (D_1, D_2) &\mapsto [D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1. \end{aligned}$$

映射 $[D_1, D_2]$ 是（也许令人惊讶的）导数，因为它是线性的

$$\begin{aligned} [D_1,D_2](v \bullet w) &:= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(v \bullet w) \\ &= D_1(D_2(v \bullet w)) - D_2(D_1(v \bullet w)) \\ &= D_1(D_2(v) \bullet w + v \bullet D_2(w)) - D_2(D_1(v) \bullet w + v \bullet D_1(w)) \\ &= D_1(D_2(v) \bullet w) + D_1(v \bullet D_2(w)) - D_2(D_1(v) \bullet w) - D_2(v \bullet D_1(w)) \\ &= D_1(D_2(v)) \bullet w + \cancel{D_2(v) \bullet D_1(w)} + \cancel{D_1(v) \bullet D_2(w)} + v \bullet D_1(D_2(w)) \\ &\quad - D_2(D_1(v)) \bullet w - \cancel{D_1(v) \bullet D_2(w)} - \cancel{D_2(v) \bullet D_1(w)} - v \bullet D_2(D_1(w)) \\ &= (D_1(D_2(v)) - D_2(D_1(v))) \bullet w + v \bullet (D_1(D_2(w)) - D_2(D_1(w))) \\ &= [D_1,D_2](v) \bullet w + v \bullet [D_1,D_2](w) \end{aligned}$$

于是 $(\mathrm{Der}_K(A), +, \cdot, [-,-])$ 是 K 上的一个李代数.

如果我们有一个流形，我们可以在一个点上定义一个开放子集的相关派生概念。

Definition. 设 M 为一个流形并设 $p \in U \subseteq M$, 其中 U 是开的. 点 p 的附近 U 的导数 *(derivation on U at p)* 是一个满足莱布尼兹律的 $\mathbb{R}$-线性映射 $D \colon \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g).$$

我们用 $\mathrm{Der}_p(U)$ 表示在 p 上 U 的 $\mathbb{R}$ 向量空间，并逐点定义运算。

Example 9.11. 切向量 $X_{\gamma,p}$ 是在 p 处对 $U \subseteq M$ 的推导，其中 U 是 p 的任意邻域。实际上，我们对切空间的定义为

$$T_pM := \mathrm{Der}_p(U),$$

一些包含 p 的开邻域 U。可以证明，这并不取决于我们选择 p 的哪个邻域 U。

9.3 切空间的基

以下是切线空间的至关重要的结果。

Theorem 9.12. 设 M 为一个流形并且令 $p \in M$. 于是

$$\dim T_pM = \dim M.$$

Remark 9.13. 请注意，尽管我们使用相同的符号，但定理陈述中出现的两个“维度”至少在表面上是完全不相关的。确实，记得 $\dim M$ 是根据图表 $U\ x$ 定义的，其中 $x\colon U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M}$，而 $\dim T_pM = |\mathcal{B}|$，其中 $\mathcal{B}$ 是向量空间 T_pM 的 Hamel 基础。证明背后的想法是从 M 的坐标卡构建 T_pM 的基。

Proof. 不失一般性地 (W.l.o.g.), 设 (U, x) 为以点 p 为中心 *(centred)* 的坐标卡 at p, 即 $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim M}$. 定义 $(\dim M)$-条曲线 $\gamma_{(a)}\colon \mathbb{R} \to U$ 通过点 p 通过要求 $(x^b \circ \gamma_{(a)})(t) = \delta^b_a t$, 即

$$\begin{aligned}\gamma_{(a)}(0) &:= p\\ \gamma_{(a)}(t) &:= x^{-1} \circ (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

其中 t 在 a^{th} 位置，其中 $1 \le a \le \dim M$。让我们计算 T_pM 中切线向量 $X_{\gamma_{(a)},p} \in T_pM$ 对任意函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ 的作用：

$$\begin{aligned}X_{\gamma_{(a)},p}(f) &:= (f \circ \gamma_{(a)})'(0)\\ &= (f \circ \mathrm{id}_U \circ \gamma_{(a)})'(0)\\ &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma_{(a)})'(0)\\ &= [\partial_b(f \circ x^{-1})(x(p))]\,(x^b \circ \gamma_{(a)})'(0)\\ &= [\partial_b(f \circ x^{-1})(x(p))]\,(\delta^b_a t)'(0)\\ &= [\partial_b(f \circ x^{-1})(x(p))]\,\delta^b_a\\ &= \partial_a(f \circ x^{-1})(x(p))\end{aligned}$$

我们为这个切向量引入了一种特殊的表示法：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p := X_{\gamma_{(a)},p},$$

x 指的是坐标卡映射。我们现在声称

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p \in T_pM \;\middle|\; 1 \le a \le \dim M \right\}$$

是 T_pM 的一个基. 首先证明 $\mathcal{B}$ 张成 T_pM.

设 $X \in T_pM$。然后，根据定义，存在从 p 到 σ 的平滑曲线，使得 $X = X_{\sigma\, p}$。对于 $\mathcal{C}^\infty(U)$ 中的 $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$，我们都有

$$\begin{aligned}X(f) &= X_{\sigma,p}(f)\\ &:= (f \circ \sigma)'(0)\\ &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \sigma)'(0)\\ &= [\partial_b(f \circ x^{-1})(x(p))]\,(x^b \circ \sigma)'(0)\\ &= (x^b \circ \sigma)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)_p (f).\end{aligned}$$

因为 $(x^b \circ \sigma)'(0) =: X^b \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$X = X^b \left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)_p,$$

即: $\mathcal{B}$ 中的任意元素 $X \in T_pM$ 是一个线性映射.

为了证明线性无关, 假设

$$\lambda^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p = 0,$$

对于一些标量 λ^a. 请注意，这是一个算子方程，右侧的零是零算子 $0 \in T_pM$.

回想一下，给定坐标卡 (U, x), 坐标映射 $x^b\colon U \to \mathbb{R}$ 是平滑的，即 $x^b \in \mathcal{C}^\infty(U)$. 。因此，我们可以将它们放入左侧以获得

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p (x^b) \\
&= \lambda^a\, \partial_a (x^b \circ x^{-1})(x(p)) \\
&= \lambda^a\, \partial_a (\mathrm{proj}_b)(x(p)) \\
&= \lambda^a \delta^b_a \\
&= \lambda^b
\end{aligned}$$

即:$\lambda^b = 0$ 代表所有 $1 \leq b \leq \dim M$。因此，$\mathcal{B}$ 确实是 T_pM 的基，并且由于构造 $|\mathcal{B}| = \dim M$，因此证明是完整的。 □

Remark 9.14. 尽管可以定义无限维流形，但在本课程中，我们将仅考虑有限维流形。因此，$\dim T_pM = \dim M$ 在此过程中始终是有限的。

Remark 9.15. 请注意，我们在证明中构建的基是不是与坐标卡无关。的确，每个不同的坐标卡都会产生不同的切空间基，我们通过将图表映射保持为基元素的符号来区分它们。

但是，这并不是我们要证明的问题，因为向量空间的每个基都必须具有相同的基数，因此只要找到一个基来确定维就足够了。

Remark 9.16. 尽管符号 $\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p$ 与变量 x^a 的偏微分的想法无关，但在以下意义上与它在符号上是一致的。

设 $M = \mathbb{R}^d$, $(U, x) = (\mathbb{R}^d, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})$ 且令 $\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^d$. If $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, 于是

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p (f) = \partial_a (f \circ x^{-1})(x(p)) = \partial_a f(p),$$

因为 $x = x^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$。此外，我们有 $\mathrm{proj}_a = x^a$。因此，我们可以将 $x^1, \ldots, x^d$ 视为 f 的自变量，然后可以这样写：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^a}(p).$$

Definition. 设 $X \in T_pM$ 是一个切向量，并令 (U, x) 是包含 p 的坐标卡。如果

$$X = X^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p,$$

则实数 $X^1, \ldots, X^{\dim M}$ 被称为 X 的分量 *(components*)，相对于坐标卡 (U, x)。基 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p\}$ 也称为坐标基 *(co-ordinate basis)*。

Proposition 9.17. *设 $X \in T_pM$ 并且令 (U, x) 和 (V, y) 为两个包含点 p 的坐标卡. 于是我们有*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p = \partial_a (y^b \circ x^{-1})(x(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)_p$$

Proof. 假设 (不失一般性地 (w.l.o.g.)) 有 $U = V$. 因为 $\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p \in T_pM$ 和 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p\}$ 构成一个基, 我们必须有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p = \lambda^b \left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)_p$$

对于一些 λ^b. 让我们通过将等式的两边应用到坐标映射 y^c 来确定 λ^b 是什么：

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p(y^c) &= \partial_a(y^c\circ x^{-1})(x(p));\\ \lambda^b\left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)_p(y^c) &= \lambda^b\,\partial_b(y^c\circ y^{-1})(y(p))\\ &= \lambda^b\,\partial_b(\mathrm{proj}_c)(y(p))\\ &= \lambda^b\,\delta_b^c\\ &= \lambda^c.\end{aligned}$$

Hence

$$\lambda^c = \partial_a(y^c\circ x^{-1})(x(p)).$$

用此表达式替换 λ^c 可以得到结果。 □

Corollary 9.18. 设 T_pM 中的 $X\in T_pM$，设 (U,x) 和 (V,y) 为两个包含 p 的坐标卡。用 X^a 和 $\widetilde{X}^a$ 分别表示 X 相对于两个坐标卡所引起的切空间基的坐标。然后我们有：

$$\widetilde{X}^a = \partial_b(y^a\circ x^{-1})(x(p))\,X^b.$$

Proof. 应用先前的结果，

$$X = X^a\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p = X^a\,\partial_a(y^b\circ x^{-1})(x(p))\left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)_p.$$

Hence, we read-off $\widetilde{X}^b = \partial_a(y^b\circ x^{-1})(x(p))\,X^a$. □

Remark 9.19. 通过滥用符号，我们可以以更熟悉的形式编写前面的方程式。用 y^b 表示映射 $y^b\circ x^{-1}\colon x(U)\subseteq\mathbb{R}^{\dim M}\to\mathbb{R}$；这些是 $\dim M$ 独立实变量的实函数。因为这里我们只对 M 中点 $p\in M$ 处发生的事情感兴趣，所以我们可以将映射 $x^1\ \dots\ x^{\dim M}$ 视为每个 y^b 的自变量。

这是一个普遍的事实：如果 $\{*\}$ 是单例（我们让 $*$ 表示其唯一元素），而 $x\colon\{*\}\to A$, $y\colon A\to B$ 是映射，则 $y\circ x$ 与具有独立变量 x 的映射 y 相同。直观地，x 只是 "选择"A 的一个元素。

因此, 我们有 $y^b = y^b(x^1,\dots,x^{\dim M})$ 并且我们可以写

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p = \frac{\partial y^b}{\partial x^a}(x(p))\left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)_p \qquad\text{and}\qquad \widetilde{X}^b = \frac{\partial y^b}{\partial x^a}(x(p))\,X^a,$$

对应于我们先前的 $e_a = A^b{}_a\widetilde{e}_b$ 和 $\widetilde{v}^b = A^b{}_a v^a$。函数 $y = y(x)$ 用旧的表示新的坐标系 ，而 $A^b{}_a$ 是此映射的 *Jacobian* 矩阵，以 $x(p)$ 评估。当然，逆变换由

$$B^b{}_a = (A^{-1})^b{}_a = \frac{\partial x^b}{\partial y^a}(y(p)).$$

Remark 9.20. 坐标卡变化下矢量分量变化的公式提出了另一种方法来定义在 p 处与 M 的切空间。

设 $\mathscr{A}_p : \{(U,x)\in\mathscr{A}\mid p\in U\}$ 是 M 上包含 p 的坐标卡的集合。点 p 处的切向量 *(tangent vector)* v 是一个映射

$$v\colon\mathscr{A}_p\to\mathbb{R}^{\dim M}$$

satisfying

$$v((V,y)) = A\,v((U,x))$$

其中 A 是 $y\circ x^{-1}\colon\mathbb{R}^{\dim M}\to\mathbb{R}^{\dim M}$ 在 $x(p)$ 处的雅可比矩阵. 在分量中, 我们有

$$[v((V,y))]^b = \frac{\partial y^b}{\partial x^a}(x(p))\,[v((U,x))]^a.$$

然后将切空间 T_pM 定义为所有切向量在 p 处的集合，并赋予适当的向量空间结构。

上面给出的是通常在物理学教科书中发现的矢量的数学定义上严格的定义，即向量是一个 “数字集”v^a，在坐标 $y = y(x)$ 改变的情况下，转换为

$$\widetilde{v}^b = \frac{\partial y^b}{\partial x^a}\, v^a.$$

要比较我们介绍的 T_pM 的不同定义以及它们的等效性，请参阅 Klaus Janich 撰写的矢量分析 *(Vector Analysis)* 的第 2 章。

10 张量丛

10.1 余切空间及其微分

由于切空间是矢量空间，因此我们可以完成抽象矢量空间设置中先前看到的所有构造。

Definition. 设 M 为一个流形且 $p \in M$. 流形 M 在点 p 处的 *余切空间 (cotangent space)* 为

$$T_p^*M := (T_pM)^*.$$

因为 $\dim T_pM$ 是有限的, 我们有 $T_pM \cong_{\text{vec}} T_p^*M$. 如果 $\{(\frac{\partial}{\partial x^a})_p\}$ 是由一些坐标卡 (U, x) 诱导的切空间 T_pM 的基, 则其对应的对偶基为 $\{(\mathrm{d}x^a)_p\}$. 由定义我们有

$$(\mathrm{d}x^a)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)_p\right) = \delta_b^a.$$

一旦有了余切空间，就可以定义张量空间。

Definition. 设 M 为一个流形且 $p \in M$. *张量空间 (tensor space)* $(T_s^r)_pM$ 定义如下

$$(T_s^r)_pM := T_s^r(T_pM) = \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{r \text{ copies}} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{s \text{ copies}}.$$

Definition. 令 M 和 N 为流形并令 $\phi\colon M \to N$ 为光滑的. ϕ 在点 $p \in M$ 处的 *微分 (differential)* (或导数 *(derivative)*) 是线性映射

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_p\phi\colon T_pM &\xrightarrow{\sim} T_{\phi(p)}N \\ X &\mapsto \mathrm{d}_p\phi\,(X) \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}_p\phi\,(X)$ 是在 $\phi(p)$ 处的对于流形 N 切向量

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_p\phi\,(X)\colon \mathcal{C}^\infty(N) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ g &\mapsto (\mathrm{d}_p\phi\,(X))(g) := X(g \circ \phi). \end{aligned}$$

如果这个定义看起来令人困惑，那么值得停下来思考一下它在说什么。直观地，如果 ϕ 将我们将 M 映射到 N，则 $\mathrm{d}_p\phi$ 将我们将 T_pM 映射到 $T_{\phi(p)}N$。这样做的方式如下。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "g\circ\phi"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(M) \arrow[d, "X"] & \mathcal{C}^\infty(N) \arrow[l, "-\circ\phi"'] \arrow[dl, "\mathrm{d}_p\phi\,(X)"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

给定 $X \in T_pM$,，我们构造 $\mathrm{d}_p\phi\,(X) \in T_{\phi(p)}N$，即在 $f(p)$ 上对 N 的求导。求导作用于函数。因此，给定 $g\colon N \to \mathbb{R}$，我们要使用 ϕ 和 X 构造一个实数。确实只有一种方法可以做到。如果我们用 ϕ 预先组合 g，我们将获得 $g \circ \phi\colon M \to \mathbb{R}$，这是 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 的元素。然后，我们可以愉快地将 X 应用于此函数以获得实数。您应该检查 $\mathrm{d}_p\phi\,(X)$ 确实是 N 的切向量。

Remark 10.1. 请注意，为谨慎起见，我们应将上面的 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 和 $\mathcal{C}^\infty(N)$ 替换为 $\mathcal{C}^\infty(U)$ 和 $\mathcal{C}^\infty(V)$，其中 $U \subseteq M$ 和 $V \subseteq N$ 是开集，分别包含 p 和 $\phi(p)$。

Example 10.2. 如果 $M = \mathbb{R}^d$ 和 $N = \mathbb{R}^{d'}$, 于是点 $p \in \mathbb{R}^d$ 处的 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$

$$\mathrm{d}_pf\colon T_p\mathbb{R}^d \cong_{\text{vec}} \mathbb{R}^d \to T_{f(p)}\mathbb{R}^{d'} \cong_{\text{vec}} \mathbb{R}^{d'}$$

就是 p 的 f 雅可比行列式。

微分的一种特殊情况是函数的梯度 $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Definition. 设 M 为一个流形并且令 $f\colon M\to\mathbb{R}$ 为光滑的. f 在点 $p\in M$ 处的梯度是一个协向量

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_p f\colon T_pM &\xrightarrow{\sim} T_{f(p)}\mathbb{R}\cong_{\mathrm{vec}}\mathbb{R}\\ X &\mapsto \mathrm{d}_pf(X):=X(f).\end{aligned}$$

实际上，我们可以将 点 $p\in M$ 处的梯度算符定义为 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_p\colon \mathcal{C}^\infty(U) &\xrightarrow{\sim} T_p^*M\\ f &\mapsto \mathrm{d}_pf,\end{aligned}$$

其中 $p\in U\subseteq M$.

Remark 10.3. 请注意，通过编写 $\mathrm{d}_pf(X):=X(f)$，我们犯了轻微（但还是真实）的符号滥用现象。由于 $\mathrm{d}_pf(X)\in T_{f(p)}\mathbb{R}$ 中，它接受一个函数并返回一个实数，但是 $X(f)$ 已经是一个实数！这是由于我们暗中采用了同构

$$\begin{aligned}\iota_d\colon T_p\mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d\\ X &\mapsto (X(\mathrm{proj}_1),\dots,X(\mathrm{proj}_d)),\end{aligned}$$

当 $d=1$, 读作

$$\begin{aligned}\iota_1\colon T_p\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ X &\mapsto X(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}).\end{aligned}$$

就我们而言，我们有

$$\mathrm{d}_pf(X):=X(-\circ f)\mapsto X(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\circ f)=X(f).$$

尽管如此，考虑 d_pf 的最佳方法是作为一个协向量，即 d_pf 接受切向量 X 并以线性方式返回实数 $X(f)$。

回想一下，如果 (U,x) 是 M 上的坐标卡，则坐标映射 $x^a\colon U\to x(U)\subseteq\mathbb{R}^{\dim M}$ 是 U 上的光滑函数。因此，我们可以将梯度算符 d_p（$p\in U$）应用于它们中的每一个以获得 T_p^*M 的 $(\dim M)$ 维个元素。

Proposition 10.4. 设 (U,x) 为 M 上的一个坐标卡, 点 $p\in U$. 集合 $\mathcal{B}=\{\mathrm{d}_px^a\mid 1\le a\le \dim M\}$ 构成基 T_p^*M.

Proof. 我们已经知道 $T_p^*M=\dim M$, 因为它是 T_pM 的对偶空间. 作为通过构造得出 $|\mathcal{B}|=\dim M$ ，足以表明它是线性独立的。假设

$$\lambda_a\,\mathrm{d}_px^a=0,$$

对于一些 $\lambda_a\in\mathbb{R}$. 将左手边应用于基元素 $\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)_p$ 得到

$$\begin{aligned}\lambda_a\,\mathrm{d}_px^a\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)_p\right) &= \lambda_a\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)_p(x^a) && (\text{definition of } \mathrm{d}_px^a)\\ &= \lambda_a\,\partial_b(x^a\circ x^{-1})(x(p)) && \left(\text{definition of } \left(\tfrac{\partial}{\partial x^b}\right)_p\right)\\ &= \lambda_a\,\partial_b(\mathrm{proj}_a)(x(p))\\ &= \lambda_a\,\delta_b^a\\ &= \lambda_b.\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{B}$ 是线性独立的，因此是 T_p^*M 的基础。而且，由于我们已经证明

$$\mathrm{d}_px^a\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right)_p\right)=\delta_b^a,$$

这个基础，实际上是 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p\}$ 的对偶基. □

Remark 10.5. 请注意一点微妙之处。给定图表 (U,x) 和 T_pM 的归纳基 $\{(\frac{\partial}{\partial x^a})_p\}$，$\{(\frac{\partial}{\partial x^a})_p\}$ 的对偶基的存在仅仅是因为 T_p^*M 是 T_pM 的对偶空间。上面显示的是，对偶基础的元素由 (U,x) 坐标图的梯度明确给出。在我们的符号中，我们有

$$(\mathrm{d}x^a)_p = \mathrm{d}_p x^a, \qquad 1 \leq a \leq \dim M.$$

10.2 前推和回撤 (Push-forward and pull-back)

点 $p \in M$ 处的平滑映射 $\phi\colon M \to N$ 的前推只是 ϕ 在 p 处的微分的另一个名字。我们再次给出定义以建立新的符号。

Definition. 令 $\phi\colon M \to N$ 是光滑流形之间的光滑映射。在 $p \in M$ 处的 ϕ 的前推是线性映射：

$$\begin{aligned}(\phi_*)_p\colon T_pM &\xrightarrow{\sim} T_{\phi(p)}N \\ X &\mapsto (\phi_*)_p(X) := X(- \circ \phi).\end{aligned}$$

如果 $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ 是 M 上的平滑曲线，而 $\phi\colon M \to N$ 是光滑的，则 $\phi \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to N$ 是 N 上的平滑曲线。

Proposition 10.6. *Let $\phi\colon M \to N$ be smooth. The tangent vector $X_{\gamma,p} \in T_pM$ is pushed forward to the tangent vector $X_{\phi\circ\gamma,\phi(p)} \in T_{\phi(p)}N$, i.e.* 令 $\phi\colon M \to N$ 光滑。切向量 $X_{\gamma,p} \in T_pM$ 向前推到切向量 $X_{\phi\circ\gamma,\phi(p)} \in T_{\phi(p)}N$，即

$$(\phi_*)_p(X_{\gamma,p}) = X_{\phi\circ\gamma,\phi(p)}.$$

Proof. Let $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, with (V,x) a chart on N and $\phi(p) \in V$. By applying the definitions, we have 设 $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$,$(V,x)$ 为 N 上的图表，$\phi(p) \in V$。通过应用定义，我们可以

$$\begin{aligned}(\phi_*)_p(X_{\gamma,p})(f) &= (X_{\gamma,p})(f \circ \phi) && (\ (\phi_*)_p \text{ 的定义}) \\ &= ((f \circ \phi) \circ \gamma)'(0) && (X_{\gamma,p} \text{ 的定义}) \\ &= (f \circ (\phi \circ \gamma))'(0) && (\circ \text{ 的结合律}) \\ &= X_{\phi\circ\gamma,\phi(p)}(f) && (\ X_{\phi\circ\gamma,\phi(p)} \text{ 的定义})\end{aligned}$$

因为 f 是任意的, 我们有 $(\phi_*)_p(X_{\gamma,p}) = X_{\phi\circ\gamma,\phi(p)}$. □

与前推相关的是平滑映射的回拉概念。

Definition. 令 $\phi\colon M \to N$ 是光滑流形之间的光滑映射。ϕ 在 $p \in M$ 处的回拉是线性映射：

$$\begin{aligned}(\phi^*)_p\colon T^*_{\phi(p)}N &\xrightarrow{\sim} T^*_pM \\ \omega &\mapsto (\phi^*)_p(\omega),\end{aligned}$$

其中 $(\phi^*)_p(\omega)$ 定义为

$$\begin{aligned}(\phi^*)_p(\omega)\colon T_pM &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ X &\mapsto \omega((\phi_*)_p(X)),\end{aligned}$$

换句话说，如果 ω 是 N 上的协矢量，则其回拉（$(\phi^*)_p(\omega)$ 是 M 上的协矢量。它首先作用于 M 上的切向量，然后将它们向前推到 N 上的切向量，然后应用 ω 给它们产生一个实数。

Remark 10.7. 如果您没有立即看到它，那么您应该花一些时间来证明到目前为止，我们定义并声称是线性的所有映射都是线性的。

Remark 10.8. 我们已经看到，给定一个平滑的 $\phi\colon M \to N$，我们可以将向量 $X \in T_pM$ 前推到向量（$(\phi_*)_p(X) \in T_{\phi(p)}N$ 上，并回拉一个余向量 $\omega \in T^*_{\phi(p)}N$ 到一个余向量 $(\phi^*)_p(\omega) \in T^*_pM$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty(M) \arrow[d, "X"] & \mathcal{C}^\infty(N) \arrow[l, "-\circ\phi"'] \arrow[dl, "(\phi_*)_p(X)"] \\
\mathbb{R} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "(\phi_*)_p"] \arrow[dr, "(\phi^*)_p(\omega)"'] & T_{\phi(p)}N \arrow[d, "\omega"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

但是，如果 $\phi\colon M \to N$ 是一个微分同胚，则我们也可以将向量 $Y \in T_{\phi(p)}N$ 拉回到向量 $(\phi^*)_p(Y) \in T_pM$，并将协向量 $\eta \in T_p^*M$ 通过使用 ϕ^{-1} 前推到一个协向量（$(\phi_*)_p(\eta) \in T^*_{\phi(p)}N$ 如下：

$$
\begin{aligned}
(\phi^*)_p(Y) &:= ((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)}(Y) \\
(\phi_*)_p(\eta) &:= ((\phi^{-1})^*)_{\phi(p)}(\eta).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty(M) \arrow[r, "-\circ\phi^{-1}"] \arrow[dr, "(\phi^*)_p(Y)"'] & \mathcal{C}^\infty(N) \arrow[d, "Y"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[d, "\eta"'] & T_{\phi(p)}N \arrow[l, "((\phi^{-1})_*)_{\phi(p)}"'] \arrow[dl, "(\phi_*)_p(\eta)"] \\
\mathbb{R} &
\end{tikzcd}
$$

仅当 ϕ 是一个微分同胚时才有可能。通常，您应记住

向量被前推，(Vectors are pushed forward,)
余向量被拉回。(covectors are pulled back.)

Remark 10.9. 给定一个光滑的映射 $\phi\colon M \to N$，如果 $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, 则 $f \circ \phi$ 通常被称为 f 沿 ϕ 的回拉。类似地，如果 γ 是 M 上的曲线，则将 $\phi \circ \gamma$ 称为沿 ϕ 的前推 γ 。例如，我们可以说

- 作用在一个函数上的切向量的前推是作用在该函数的回拉上的切向量;(the push-forward of a tangent vector acting on a function is the tangent vector acting on the pull-back of the function;)
- 切线向量到曲线的前推是曲线到前推的切向量。(the push-forward of a tangent vector to a curve is the tangent vector to the push-forward of the curve.)

10.3 浸入和嵌入 (Immersions and embeddings)

现在，我们考虑一个问题，在什么情况下，光滑流形可以“坐 (sit)”在 $\mathbb{R}^d$ 中, 其中 $d \in \mathbb{N}$. 实际上，“坐 (sit)”在另一个流形内部有两个概念，即浸入和嵌入。

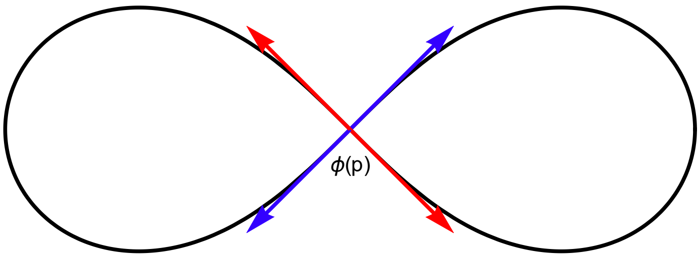
Definition. 一个光滑映射 $\phi\colon M \to N$ 被称为 M *浸入 (immersion)* 到 N 中, 假如导数

$$
\mathrm{d}_p\phi \equiv (\phi_*)_p \colon T_pM \xrightarrow{\sim} T_{\phi(p)}N
$$

对于所有 $p \in M$ 都是单射性的。流形 M 被认为是 N 的一个*浸入子流形 (immersed submanifold)*。

从线性代数理论，我们立即得出结论，对于 $\phi\colon M \to N$ 是一个浸入，我们必须使 $\dim M \leq \dim N$。一个与浸入密切相关的概念是浸没，在浸没中，我们要求每个 $(\phi_*)_p$ 都必须是满射，因此，必须使 $\dim M \geq \dim N$。但是，这里我们不需要。

Example 10.10. 考虑映射 $\phi\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ ，其图像复制如下。



映射 ϕ 不是单射性的，即存在 $p,q \in S^1$，其中 $p \neq q$ 且 $\phi(p)=\phi(q)$。当然，这意味着 $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^2 = T_{\phi(q)}\mathbb{R}^2$. 但是映射 $(\phi_*)_p$ 和 $(\phi_*)_q$ 都是单射的，其图像分别由蓝色和红色箭头表示。因此，映射 ϕ 是浸入的。

Definition. 光滑映射 $\phi\colon M \to N$ 称为 M 到 N 的（平滑）嵌入如果

- $\phi\colon M \to N$ 是一个浸入;
- $M \cong_{\text{top}} \phi(M) \subseteq N$, 其中 $\phi(M)$ 携带从 N 继承的子集拓扑.

流形 M 被称为是 N 的*嵌入子流形 embedded submanifold*。

Remark 10.11. 如果拓扑空间之间的连续映射满足上述第二个条件，则称为拓扑嵌入。因此，光滑嵌入是一种拓扑嵌入，也是一种浸入（与简单地是光滑拓扑嵌入相反）。

在微分几何学的早期，有两种研究流形的方法。一个是外部视图，其中流形被定义为 $\mathbb{R}^d$ 的特殊子集，另一个是内部视图，这是我们在此处采用的视图。

惠特尼定理（我们将在没有证明的情况下进行陈述）指出，这两种方法实际上是等效的。

Theorem 10.12 (Whitney). *任何光滑的流形 M 都可以是*

- *嵌入 (embedded in) $\mathbb{R}^{2\dim M}$;*
- *浸入 (immersed in) $\mathbb{R}^{2\dim M-1}$.*

Example 10.13. Klein 瓶可以嵌入 $\mathbb{R}^4$ 中，但不能嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中。但是，它可以浸入 $\mathbb{R}^3$ 中。

我们上面介绍的被称为惠特尼定理的强版本。也有一个较弱的版本，但此结果也有更强的版本，例如以下。

Theorem 10.14. *任何光滑的流形都可以浸入 $\mathbb{R}^{2\dim M - a(\dim M)}$，其中 $a(n)$ 是 $n \in \mathbb{N}$ 的二进制展开式中 1 的个数。*

Example 10.15. 如果 $\dim M = 3$, 则因此

$$3_{10} = (1\times 2^1 + 1\times 2^0)_{10} = 11_2,$$

我们有一个 $a(\dim M)=2$, 因此每个 3 维流形都可以浸入 $\mathbb{R}^4$ 中。请注意，即使是惠特尼定理的强形式也只能告诉我们，我们可以将 M 浸入 $\mathbb{R}^5$ 中。

10.4 切丛

我们想将流形 M 上的矢量场定义为“光滑”映射，为每个 $p\in M$ 分配 T_pM 中的切向量。但是，由于这将是每个点到不同空间的“映射”，因此尚不清楚如何定义其光滑度。

最简单的解决方案是将所有切线空间合并到一个唯一的集合中，并为其配备平滑结构，以便随后我们可以将矢量场定义为平滑流形之间的平滑映射。

Definition. 给定一个光滑的流形 M，M 的切线束是 M 的所有切线空间的不相交的并集。即

$$TM := \coprod_{p\in M} T_pM,$$

配备了规范的投影映射

$$\begin{aligned}\pi\colon TM &\to M\\ X &\mapsto p,\end{aligned}$$

其中 p 是唯一的 $p \in M$ ，使得 $X \in T_pM$。

现在，我们需要为 TM 配备光滑流形的结构。我们可以通过从 M 上的光滑图集构建 TM 的光滑地图册来实现这一目标，如下所示。令 $\mathscr{A}_M$ 为 M 的平滑图集，令 $(U,x) \in \mathscr{A}_M$。如果 $X \in \mathrm{preim}_\pi(U) \subseteq TM$,，那么根据 π 的定义，$X \in \mathrm{preim}_\pi(U) \subseteq TM$. 此外，由于 $\pi(X) \in U$, 我们可以根据坐标卡 (U,x) 得出的基数来扩展 M：

$$X = X^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_{\pi(X)},$$

其中 $X^1, \ldots, X^{\dim M} \in \mathbb{R}$. 然后我们可以定义映射

$$\begin{aligned}\xi\colon \mathrm{preim}_\pi(U) &\to x(U) \times \mathbb{R}^{\dim M} \cong_{\mathrm{set}} \mathbb{R}^{2\dim M}\\ X &\mapsto (x(\pi(X)), X^1, \ldots, X^{\dim M}).\end{aligned}$$

假定 TM 配备有合适的拓扑，例如初始拓扑（即, 使 π 连续的 TM 上最粗糙的拓扑），我们要求该对（$(\mathrm{preim}_\pi(U), \xi)$ 是 TM 上的坐标卡

$$\mathscr{A}_{TM} := \{(\mathrm{preim}_\pi(U), \xi) \mid (U,x) \in \mathscr{A}_M\}$$

是在 TM 上的光滑坐标卡。请注意，从其定义可以明显看出 ξ 是双射。这里我们不会显示（$(\mathrm{preim}_\pi(U), \xi)$ 是一个坐标卡，但是我们会显示 $\mathscr{A}_{TM}$ 是一个光滑的坐标卡。

Proposition 10.16. *任意两个坐标卡 $(\mathrm{preim}_\pi(U), \xi), (\mathrm{preim}_\pi(\widetilde{U}), \widetilde{\xi}) \in \mathscr{A}_{TM}$ 是 $\mathcal{C}^\infty$-相容的.*

Proof. 令 (U,x) 和 $(\widetilde{U}, \widetilde{x})$ 分别是 M 上的两个坐标卡,分别引起 $(\mathrm{preim}_\pi(U), \xi)$ 和 $(\mathrm{preim}_\pi(\widetilde{U}), \widetilde{\xi})$。我们需要证明映射

$$\widetilde{\xi} \circ \xi^{-1}\colon x(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{\dim M} \to \widetilde{x}(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{\dim M}$$

是光滑的，因为是 $\mathbb{R}^{2\dim M}$ 的开子集之间的映射。回想一下，这样的映射在且仅当在分量方向上是平滑的时才平滑。在第一个 $\dim M$ 分量上，$\widetilde{\xi} \circ \xi^{-1}$ 的作用为

$$\begin{aligned}\widetilde{x} \circ x^{-1}\colon x(U \cap \widetilde{U}) &\to \widetilde{x}(U \cap \widetilde{U})\\ x(p) &\mapsto \widetilde{x}(p),\end{aligned}$$

而其余的 $\dim M$ 分量则是我们先前遇到的矢量分量的变化，即

$$X^a \mapsto \widetilde{X}^a = \partial_b(y^a \circ x^{-1})(x(p))\, X^b.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi} \circ \xi^{-1}\colon \quad & x(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{\dim M} \to \widetilde{x}(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{\dim M}\\ & (x(\pi(X)), X^1, \ldots, X^{\dim M}) \mapsto (\widetilde{x}(\pi(X)), \widetilde{X}^1, \ldots, \widetilde{X}^{\dim M}),\end{aligned}$$

在每个分量中都光滑，因此光滑。 □

因此，光滑流形 M 的切线束本身就是维度 $2\dim M$ 的光滑流形，并且关于该结构的投影 $\pi\colon TM \to M$ 是光滑的。类似地，我可以通过定义, 来构造从 T^*M 到 M 的余切丛

$$T^*M := \coprod_{p \in M} T_p^*M$$

然后使用对偶基 $\{(\mathrm{d}x^a)_p\}$ 而非 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p\}$。

11 张量空间理论 II：环上张量

11.1 矢量场

既然已经定义了切线束，就可以定义矢量场了。

Definition. 令 M 为光滑流形，令 $TM \xrightarrow{\pi} M$ 为切丛。M 上的向量场是切丛的光滑部分，即光滑映射 $\sigma\colon M \to TM$，使得 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$。

$$
\begin{tikzcd}
TM \arrow[d, shift left, "\pi"] \\
M \arrow[u, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd}
$$

我们用 $\Gamma(TM)$, 表示 M 上所有向量场的集合，即

$$\Gamma(TM) := \{\sigma\colon M \to TM \mid \sigma \text{ is smooth and } \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M\}.$$

实际上，这是从上所有截面 (sections) 的集合的标准表示法。

Remark 11.1. 一个等效的定义是 M 上的向量场 σ 是代数 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 的导数，即 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\sigma\colon \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(M)$$

满足 Leibniz 规则（关于 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 上的逐点乘法）

$$\sigma(fg) = g\,\sigma(f) + f\,\sigma(g).$$

此定义更适合于某些目的，稍后我们将在不做任何符号区分的情况下从一个切换到另一个。

Example 11.2. 令 (U, x) 为 M 上的坐标卡。对于每个 $1 \leq a \leq \dim M$，映射

$$\begin{aligned} \sigma\colon U &\to TU \\ p &\mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p \end{aligned}$$

是子流形 U 上的向量场。我们也可以将其视为线性映射

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^a}\colon \mathcal{C}^\infty(U) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(U) \\ f &\mapsto \frac{\partial}{\partial x^a}(f) = \partial_a(f \circ x^{-1}) \circ x. \end{aligned}$$

通过滥用符号，通常将上方的右边的符号简单地表示为 $\partial_a f$。

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "x"'] & & \mathbb{R} \\
x(U) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M} \arrow[urr, "f \circ x^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "\partial_a f"] \arrow[d, "x"'] & & \mathbb{R} \\
x(U) \subseteq \mathbb{R}^{\dim M} \arrow[urr, "\partial_a(f \circ x^{-1})"'] & &
\end{tikzcd}
$$

回想一下，给定一个光滑的映射 $\phi\colon M \to N$，前推 $(\phi_*)_p$ 是一个线性映射，该线性映射接受 T_pM 中的切线矢量并输出 $T_{\phi(p)}N$ 中的切线矢量。当然，对于每个 $p \in M$, 我们都有一个这样的映射。我们可以将它们全部收集到一个光滑映射中。

Definition. 令 $\phi\colon M \to N$ 光滑。前推 *(push-forward)*ϕ_* 定义为

$$\begin{aligned} \phi_*\colon TM &\to TN \\ X &\mapsto (\phi_*)_{\pi(X)}(X). \end{aligned}$$

对于某些 $p\in M$, 任何向量 $X\in TM$ 都必须属于 T_pM ，即 $p=\pi(X)$. 映射 ϕ_* 简单地取任意向量 $X\in TM$ 并在“右”点应用通常的前推，在 TN 处产生一个向量。可以类似地定义 $\phi^*\colon T^*N\to T^*M$。理想的下一步是尝试构建映射 $\Phi_*\colon\Gamma(TM)\to\Gamma(TN)$ ，该映射允许我们将 M 上的矢量场向前推到 N 上的矢量场。给定 $\sigma\in\Gamma(TM)$, 我们将就像构造一个 $\Phi_*(\sigma)\in\Gamma(TN)$. 这并非无关紧要，因为尤其需要将 $\Phi_*(\sigma)$ 设为光滑映射 $N\to TN$。请注意，组成 $\phi_*\circ\sigma$ 是映射 $M\to TN$，因此 $\mathrm{im}_{\phi_*\circ\sigma}(M)\subseteq TN$. 因此，我们可以尝试通过将每个 $p\in N$ 映射到 $\mathrm{im}_{\phi_*\circ\sigma}(M)$ 中的某个切向量来定义 $\Phi_*(\sigma)$. 不幸的是，至少有两种方法可以解决此问题 (there are at least two ways in which this can go wrong.)。

1. 映射 ϕ 可能无法注入。然后，将有两个点 $p_1,p_2\in M$，使得 $p_1\neq p_2$ 并且 $\phi(p_1)=\phi(p_2)=:q\in N$. 因此，我们将在 N 上有两个切矢量，它们的基点为 q，即 $(\phi_*\circ\sigma)(p_1)$ 和 $(\phi_*\circ\sigma)(p_2)$。这两个不必 *need not* 相等，如果不相等，则映 $\Phi_*(\sigma)$ 在 q 处定义不明确。
2. 映射 ϕ 可能不能是满射。然后，将有一些 $q\in N$ ，使得不存在 $X\in\mathrm{im}_{\phi_*\circ\sigma}(M)$ 且 $\pi(X)=q$ (其中 $\pi\colon TN\to N$))。则映射 $\Phi_*(\sigma)$ 将在 q 处未定义。
3. 即使映射 ϕ 是双射的，其逆 ϕ^{-1} 也可能无法平滑。但是 $\Phi_*(\sigma)$ 不能保证是平滑的映射。

当然，如果 $\phi\colon M\to N$ 是一个微分同胚，一切都会变得容易。

$$
\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "\phi_*"] & TN \\
M \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\phi"] & N \arrow[u, "\Phi_*(\sigma)"']
\end{tikzcd}
$$

如果 $\sigma\in\Gamma(TM)$, 我们可以定义 前推 *(push-forward)* $\Phi_*(\sigma)\in\Gamma(TN)$ 为

$$\Phi_*(\sigma):=\phi_*\circ\sigma\circ\phi^{-1}.$$

更一般而言，如果 $\phi\colon M\to N$ 是光滑的且 $\sigma\in\Gamma(TM)$, 我们可以定义 $\Phi_*(\sigma)=\tau$, 如果 σ 和 τ ϕ-关联 *(related)* 的，即, 它们满足

$$\tau\circ\phi=\phi_*\circ\sigma.$$

我们可以为集合 $\Gamma(TM)$ 进行以下操作。首先是我们现在熟悉的逐点加法：

$$
\begin{aligned}
\oplus\colon \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)&\to\Gamma(TM)\\
(\sigma,\tau)&\mapsto\sigma\oplus\tau,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\sigma\oplus\tau\colon M&\to\Gamma(TM)\\
p&\mapsto(\sigma\oplus\tau)(p):=\sigma(p)+\tau(p).
\end{aligned}
$$

请注意，上面右侧的 $+$ 是 T_pM 中的加法。更有趣的是，我们还定义了以下乘法运算：

$$
\begin{aligned}
\odot\colon \mathcal{C}^\infty(M)\times\Gamma(TM)&\to\Gamma(TM)\\
(f,\sigma)&\mapsto f\odot\sigma,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f\odot\sigma\colon M&\to\Gamma(TM)\\
p&\mapsto(f\odot\sigma)(p):=f(p)\sigma(p).
\end{aligned}
$$

注意，由于 $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$,，我们有 $f(p)\in\mathbb{R}$, 因此上面的乘法是 T_pM 上的标量乘法。

如果考虑三元组 $(\mathcal{C}^\infty(M),+,\bullet)$，其中 $\bullet$ 是如在代数和导数部分中所定义的逐项函数乘法，则三元组（$(\Gamma(TM),\oplus,\odot)$ 满足

- $(\Gamma(TM), \oplus)$ 是阿贝尔的, 其中 $0 \in \Gamma(TM)$ 是将每个 $p \in M$ 映射到 T_pM 中的零切向量的截面；
- $\Gamma(TM) \setminus \{0\}$ 满足

  i) $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : \forall \sigma, \tau \in \Gamma(TM) \setminus \{0\} : f \odot (\sigma \oplus \tau) = (f \odot \sigma) \oplus (f \odot \tau)$;

  ii) $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) : \forall \sigma \in \Gamma(TM) \setminus \{0\} : (f + g) \odot \sigma = (f \odot \sigma) \oplus (g \odot \sigma)$;

  iii) $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) : \sigma \in \Gamma(TM) \setminus \{0\} : (f \bullet g) \odot \sigma = f \odot (g \odot \sigma)$;

  iv) $\forall \sigma \in \Gamma(TM) \setminus \{0\} : 1 \odot \sigma = \sigma$,

  其中 $1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 将每个 $p \in M$ 映射到 $1 \in \mathbb{R}$.

这些恰恰是向量空间的公理！说出 $\Gamma(TM)$ 是 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 上的向量空间的唯一障碍是三元组 $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \bullet)$ 不是代数场，而只是一个环。我们可以简单地谈论“环上的向量空间”，但是环上的向量空间与字段上的向量空间有着截然不同的属性，以至于它们有自己的名字：模 *(modules)*。

Remark 11.3. 当然，我们可以定义 $\odot$ 只需使用实数 $\mathbb{R}$ 而不是实函数 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 作为逐点全局 *(global)* 缩放 (scaling)。然后，由于 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 是一个代数场，因此我们将在 $\Gamma(TM)$ 具有明显的 $\mathbb{R}$-向量空间结构。但是，此向量空间的基础必然是不可数无穷 (uncountably infinite) 的，因此它不能为我们的向量场提供非常有用的分解。

相反，我们已经定义了的算符 $\odot$ 允许定义局部 *(local)* 缩放，即, 我们可以在每个点上按不同的值缩放矢量场，并且在模结构内对矢量场进行更有用的分解。

11.2 环和环上的模

与数学家不同，大多数应用数学的人倾向于将环和模视为有些深奥的对象，但它们根本不是深奥的。如我们所见，它们在流形的研究中自然而然地出现，它们的异常特性，至少与域和向量空间相比，具有直接的几何意义，使我们更好地理解了该主题。

为了您更好地理解，我们首先回顾一下有关环的一些基本事实。

Definition. 一个 环 *(ring)* 是一个三元有序对 $(R, +, \cdot)$, 其中 R 是一个集合并且 $+, \cdot \colon R \times R \to R$ 是满足以下公理的映射:

- $(R, +)$ 是一个阿贝尔群:

  i) $\forall a, b, c \in R : (a + b) + c = a + (b + c)$;

  ii) $\exists 0 \in R : \forall a \in R : a + 0 = 0 + a = a$;

  iii) $\forall a \in R : \exists -a \in R : a + (-a) = (-a) + a = 0$;

  iv) $\forall a, b \in R : a + b = b + a$;

- 运算 $\cdot$ 是结合的并满足加法分配律:

  v) $\forall a, b, c \in R : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

  vi) $\forall a, b, c \in R : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

  vii) $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

请注意，由于 $\cdot$ 不需要是可交换的，因此公理 vi 和 vii 都是必需的。

Definition. 一个换 $(R, +, \cdot)$ 被称为

- *交换的 (commutative)* 若 $\forall a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$;
- *有单位元的 unital* 若 $\exists 1 \in R : \forall a \in R : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$;
- *一个 除 (division)* (or *偏斜 (skew)*) *环 (ring)* 假如它有单位元并且

$$\forall a \in R \setminus \{0\} : \exists a^{-1} \in R \setminus \{0\} : \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

在单位环中，存在一个乘法逆的元素称为单位 *(unit)*。环 R 的单位的集合用 R^* 表示（不要与向量空间对偶混淆），并在乘法下形成一个群。那么，R 是除法环当且仅当 $R^* = R \setminus \{0\}$.

Example 11.4. 集合 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, 和 $\mathbb{C}$ 在一般运算下都是环。除了 $\mathbb{Z}$, 它们也都是域.

Example 11.5. 令 M 为光滑流形. 于是

- $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \cdot)$, 其中 $\cdot$ 是数量乘法 (通过与一个实数), 是一个 $\mathbb{R}$-上的向量空间. 它不是一个环因为 $\cdot$ 不是这么一个映射 $\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$.
- $(\mathcal{C}^\infty(M), +, \bullet)$, 其中 $\bullet$ 是映射的逐点乘法，是可交换的单位环，但不是除法环，因此不是域。

通常, 如果 $(A, +, \cdot, \bullet)$ 是一个代数, 则 $(A, +, \bullet)$ 是一个环.

Definition. 设 $(R, +, \cdot)$ 为一个单位环. 一个三元有序对 $(M, \oplus, \odot)$ 被称为一个 R-模 *(module)* 如果映射

$$\oplus\colon M \times M \to M$$
$$\odot\colon\ R \times M \to M$$

满足向量空间公理, i.e. $(M, \oplus)$ 是一个阿贝尔群并且对于所有的 $r, s \in R$ 并且所有的 $m, n \in M$, 我们有

i) $r \odot (m \oplus n) = (r \odot m) \oplus (r \odot n)$;

ii) $(r + s) \odot m = (r \odot m) \oplus (s \odot m)$;

iii) $(r \cdot s) \odot m = r \odot (s \odot m)$;

iv) $1 \odot m = m$.

我们对向量空间的大多数定义都没有改变地保留到模中，包括基的定义，即线性独立的生成集。

Remark 11.6. 即使我们不需要它，我们也要注意，上面定义的是左 *(left)* R-模，因为乘法只在左上定义（因此才有意义）。右 *(right)* R-模的定义完全类似。此外，如果 R 和 S 是两个单元环，那么我们可以将 M 定义为*R-S-双模 (bimodule)*，如果它同时是左 $R-$ 模和右 $S-$ 模。双模结构正是概括我们之前遇到的推导概念所需要的。

Example 11.7. 任何环 R 是它自身的一个模。Any ring R is trivially a module over itself.

Example 11.8. 一个三元有序组 $(\Gamma(TM), \oplus, \odot)$ 是一个 $\mathcal{C}^\infty(M)$-模.

在下文中，我们通常用 $+$ 表示 $\oplus$ 并略去 $\odot$，就像我们对向量空间所做的那样。

11.3 模的基 (Bases for modules)

将模块与向量空间区分开的关键事实是，与向量空间不同，R 模块不需要具有基础，除非 R 是除环。

Theorem 11.9. *如果 D 是一个除环, 于是对任意 D-模 V 允许一个基.*

Corollary 11.10. *每个向量空间都有一个基，因为任何域都是除环。*

在深入研究证明之前，让我们考虑一些几何示例。

Example 11.11. a) 设 $M = \mathbb{R}^2$ 并考虑 $v \in \Gamma(T\mathbb{R}^2)$. 根据标准向量分析的事实，任何这样的 v 都可以唯一地写为

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2$$

对于一些 $v^1, v^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ 和 $e_1, e_2 \in \Gamma(T\mathbb{R}^2)$. 因此, 尽管 $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ 是一个 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$-模并且 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ 不是 *(is not)* 一个除环, 它仍然有基。注意，v 的线性展开中的系数是函数。

此示例说明了与上述定理相反的事实：如果 D 不是除法环，则 D-模可能有也可能没有基。

b) 令 $M = S^2$. 代数拓扑的一个著名结果被称为 *毛球定理 (hairy ball theorem)*，指出在偶数 n 球面上没有不消失的光滑切向量场。因此，我们可以将任意平滑向量场 $v \in \Gamma(TS^2)$ 乘以 $f \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$，该函数在除 v 之外的所有地方均为零，尽管 $f \neq 0$ 和 $v \neq 0$ 仍得到 $fv = 0$。因此，在 S^2 上没有一组线性独立的矢量场，更不用说一个基础了。

定理的证明要求选择公理，即称为 Zorn 引理的等效形式。

Lemma 11.12 (Zorn)**.** *一个部分有序集合 P 的每个全序子集 T 在 P 中都有一个包含一个极大元的上界。*

当然，我们现在需要定义出现在 Zorn 引理陈述中的新术语。

Definition. 一个*部分有序集 (partially ordered set)*（简称为 poset）是对 $(P, \leq)$，其中 P 是集合，而 $\leq$ 是 P 上的偏序，即 P 上的一个关系满足

i) *反身性 (reflexivity):* $\forall\, a \in P : a \leq a$;

ii) *反对称性 (anti-symmetry):* $\forall\, a, b \in P : (a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$;

iii) *传递性 (transitivity):* $\forall\, a, b, c \in P : (a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$.

在偏序的集合中，尽管每个元素都通过反身性与其自身相关，但两个不同的元素不必关联

Definition. 一个*完全有序集 (totally ordered set)* 是一对 $(P, \leq)$，其中 P 是一个集合而 $\leq$ 是 P 上的全序，即 P 上的一个关系满足

a) *反对称 (anti-symmetry):* $\forall\, a, b \in P : (a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$;

b) *传递 (transitivity):* $\forall\, a, b, c \in P : (a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$;

c) *全局性 (totality):* $\forall\, a, b \in P : a \leq b \vee b \leq a$.

请注意，全序是偏序的特殊情况，因为通过使 $a = b$ 为整体条件，我们可以获得自反性。在全序的集合中，每对元素都是相关的。

Definition. 令 $(P, \leq)$ 为部分有序集，令 $T \subseteq P$。如果满足，则元素 $u \in P$ 为 T 的上界, 如果

$$\forall\, t \in T : \; t \leq u.$$

由于反身性, 部分有序集合的每个单元素子集都有至少一个上界。但是，通常，一个子集可能没有任何上界。例如，如果子集包含与任何其他元素都不相关的元素。

Definition. 设 $(P, \leq)$ 为一个偏序集. P 的一个 *极大元 (maximal element)* 是 P 中的一个元素 $m \in P$ 使得

$$\nexists\, a \in P : \; m \leq a$$

或者换言之,

$$\forall\, a \in P : \; (m \leq a) \Rightarrow (m = a).$$

注意这是 *不 (not* 等价于

$$\forall\, a \in P : \; a \leq m$$

除非 $(P, \leq)$ 是全序集.

现在我们准备证明该定理。

Proof of Theorem 11.9. 我们将一次解决这一步骤。

a) 设 $S \subseteq V$ 为集合 V 一个生成集, i.e.

$$\forall\, v \in V : \exists\, e_1, \ldots, e_N \in S : \exists\, d^1, \ldots, d^N \in D : \; v = d^a e_a.$$

一个生成集合是存在的, 因为可能取 $S = V$.

b) 定义一个偏序集 $(P, \leq)$ 由

$$P := \{U \in \mathcal{P}(S) \mid U \text{ 是线性无关的 (is linearly independent)}\}$$

并且 $\leq := \subseteq$, 也就是说，我们通过集合理论包含来偏序。

c) 设 $T \subseteq P$ 为任意偏序集 P 的子集. 于是 $\bigcup T$ 是 T 的一个上界, 并且它是线性独立的（通过全序假设）。因此 $\bigcup T \in P$.

根据 Zorn 的引理，P 具有极大元素。设 $\mathcal{B} \in P$ 是任何这样的元素。通过构造，$\mathcal{B}$ 是生成集 S 的最大（相对于包含而言）线性独立子集。

d) 我们称 $S = \operatorname{span}_D(\mathcal{B})$. 事实上, 设 $v \in S \setminus \mathcal{B}$. 于是 $\mathcal{B} \cap \{v\} \in \mathcal{P}(S)$. 因此 $\mathcal{B}$ 是最大元, 集合 $\mathcal{B} \cap \{v\}$ 不 *(not)* 是线性无关的, 因此

$$\exists\, e_1, \ldots, e_N \in \mathcal{B} : \exists\, d, d^1, \ldots, d^N \in D : \; d^a e_a + dv = 0,$$

系数 $d, d^1, \ldots, d^N$ 并非全为零。特别地，$d \neq 0$，因为如果是，对于某些 $d^1, \ldots, d^N$ 它将立即跟随 $d^a e_a = 0$ 并非全为零，这与 $\mathcal{B}$ 的线性独立性相矛盾。由于 D 是一个除环且 $d \neq 0$，因此存在 d 的乘法逆。然后我们可以将上式的两边乘以 $d^{-1} \in D$ 得到

$$v = (d^{-1} \cdot d^a)\, e_a.$$

Hence $S = \operatorname{span}_D(\mathcal{B})$.

e) 我们因此有

$$V = \operatorname{span}_D(S) = \operatorname{span}_D(\mathcal{B})$$

并且因为 $\mathcal{B}$ 是 V 的一个基. □

我们再次强调，如果 D 不是除 (分隔) 环，则 D 模块可以但不必具有基。

11.4 模的构造和应用

和向量空间一样，我们也可以使用模执行通常的构造。

Definition. 两个 R-模块 M 和 N 的直和为 R 模块 $M \oplus N$, 它具 $M \times N$ 作为其基的集合, 并且操作（从 M 和 N 继承）是按分量定义的。

请注意，虽然我们一直使用 $\oplus$ 来临时区分不同空间中的两个“加号”运算，但是符号 $\oplus$ 是直和的标准符号。

Definition. 一个 R-模 M 被称为

- 有限生成的 *(finitely generated)* 如果它有一个有限的生成集合;
- 自由的 *(free)* 它有一个基;
- 投射的 *(projective)* 如果它是自由 R-模 F 的直和，即 i.e.

$$M \oplus Q = F$$

对于一些 R-模 Q.

Example 11.13. 我们已经看到, $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ 是自由的同时 $\Gamma(TS^2)$ 不自由.

Example 11.14. 显然，每个自由模块也是投射的。

Definition. 令 M 和 N 为两个（左）R 模块。映射 $f\colon M \to N$ 被称为R-线性映射 *(linear map)* 或 R 模同态R-模同态 *(module homomorphism)*，如果

$$\forall\, r \in R : \forall\, m_1, m_2 \in M : \; f(rm_1 + m_2) = rf(m_1) + f(m_2),$$

其中应该清楚哪个运算在 M 中，哪个运算在 N 中。双射模同构被称为模同构 *(module isomorphism)*，如果它们之间存在模同构，我们写成 $M \cong_{\text{mod}} N$.

如果 M 和 N 是右 R-模, 然后将线性条件写为

$$\forall r \in R : \forall m_1, m_2 \in M : \ f(m_1 r + m_2) = f(m_1)r + f(m_2).$$

Proposition 11.15. 如果有限生成的模 R-模 F 是自由的，并且 $d \in \mathbb{N}$ 是有限基数，则

$$F \cong_{\text{mod}} = \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{d\ copies} =: R^d.$$

可以证明，如果 $R^d \cong_{\text{mod}} R^{d'}$，则 $d = d'$，因此，对于有限生成的自由模，维数的概念是明确定义的。

Theorem 11.16 (Serre, Swan, et al.). 令 E 为光滑流形 M 上的矢量纤维丛。然后，E 在 M 上所有光滑截面的集合 $\Gamma(E)$ 是有限生成的射影 $\mathcal{C}^\infty(M)$-模。

一个向量纤维丛是一个每根纤维都是向量空间的纤维丛。一个示例是流形的切线束。

Remark 11.17. 该定理的直接结果是，对于 M 上的任何矢量光纤束 E，都存在一个 $\mathcal{C}^\infty(M)$-模 Q，使得直和 $\Gamma(E) \oplus Q$ 是自由的。如果可以选择 Q 作为平凡模 0，则 $\Gamma(E)$ 本身是自由的，就像 $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ 那样。从某种意义上说，模 Q 量化 $\Gamma(E)$ 失败的基。

Theorem 11.18. 令 P, Q 是交换环 R 上的有限生成的（投影）模。于是

$$\text{Hom}_R(P, Q) := \{\phi \colon P \xrightarrow{\sim} Q \mid \phi \text{ is } R\text{-linear}\}$$

还是一个有限生成的（投影）R 模块，其操作是逐点定义的。

证明与向量空间完全相同。例如，我们可以使用它来定义模的对偶。例如

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma(TM), \mathcal{C}^\infty(M)) =: \Gamma(TM)^*.$$

可以证明 $\Gamma(TM)^*$ 与切线丛 $\Gamma(T^*M)$ 上的光滑截面（即协矢量场）一致。回想一下，就像矢量场一样，矢量场是切线束 T^*M 的光滑部分，即，光滑映射 $\omega \colon M \to T^*M$ 和 $\pi \circ \omega = \text{id}_M$。与矢量场不同，我们始终可以沿着流形之间的任何光滑映射定义协向量场的拉回。

Definition. 令 $\phi \colon M \to N$ 为光滑的并令 $\omega \in \Gamma(T^*N)$. 我们定义 ω 的拉回 *(pull-back)* $\Phi^*(\omega) \in \Gamma(T^*M)$ 为

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega) \colon M &\to T^*M \\ p &\mapsto \Phi^*(\omega)(p), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega)(p) \colon T_pM &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ X &\mapsto \Phi^*(\omega)(p)(X) := \omega(\phi(p))(\phi_*(X)), \end{aligned}$$

如果下图所示

$$\begin{tikzcd} T^*M & T^*N \arrow[l, "\phi^*"'] \\ M \arrow[u, "\Phi^*(\omega)"] \arrow[r, "\phi"] & N \arrow[u, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

我们当然可以通过构造 M 的 (r, s) 张量从来概括这些思想

$$T_s^r M := \coprod_{p \in M} (T_s^r)_p M$$

因此，将 M 上的（(r, s) 型张量场定义为 $\Gamma(T_s^r M)$ 的元素，即张量束的光滑截面。如果 $\phi \colon M \to N$ 是平滑的，我们可以通过归纳协矢量场的拉回来定义反张量（即类型 $(0, q)$）的拉回。如果

$\phi\colon M\to N$ 是一个微分同胚，那么我们可以定义任何光滑 (p,q) 张量场 $\tau\in\Gamma(T^r_sN)$ 的回拉为

$$\begin{aligned}&\Phi^*(\tau)(p)(\omega_1,\dots,\omega_r,X_1,\dots,X_s)\\&\qquad:=\tau(\phi(p))\big((\phi^{-1})^*(\omega_1),\dots,(\phi^{-1})^*(\omega_r),\phi_*(X_1),\dots,\phi_*(X_s)\big),\end{aligned}$$

其中 $\omega_i\in T^*_pM$ 并且 $X_i\in T_pM$.

但是，张量场具有与真实的多线性映射相同的特征。实际上，这是标准教科书定义。

Definition. 令 M 为光滑流形。M 上的光滑(r,s) 张量场 *(tensor field)*τ 是 $\mathcal{C}^\infty(M)$-多重线性映射

$$\tau\colon\underbrace{\Gamma(T^*M)\times\cdots\times\Gamma(T^*M)}_{r\text{ copies}}\times\underbrace{\Gamma(TM)\times\cdots\times\Gamma(TM)}_{s\text{ copies}}\to\mathcal{C}^\infty(M).$$

其与从定义的等价性是由于张量的点状性质（ the pointwise nature of tensors.)。例如，一个向量场 $\omega\in\Gamma(T^*M)$ 可以作用于向量场 $X\in\Gamma(TM)$ 从而产生一个光滑函数 $\omega(X)\in\mathcal{C}^\infty(M)$，

$$(\omega(X))(p):=\omega(p)(X(p)).$$

于是, 我们可以看到对于任意 $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, 我们有

$$(\omega(fX))(p)=\omega(p)(f(p)X(p))=f(p)\omega(p)(X(p))=:(f\omega(X))(p)$$

因此, 映射 $\omega\colon\Gamma(TM)\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}^\infty(M)$ 是 $\mathcal{C}^\infty(M)$-线性的.

类似地，可以将 M 上所有 (r,s) 光滑张量场的集合 $\Gamma(T^r_sM)$ 设为 $\mathcal{C}^\infty(M)$-模，并逐点定义模操作。

我们还可以定义张量场上的张量积

$$\begin{aligned}\otimes\colon\Gamma(T^p_qM)\times\Gamma(T^r_sM)&\to\Gamma(T^{p+r}_{q+s}M)\\(\tau,\sigma)&\mapsto\tau\otimes\sigma\end{aligned}$$

类似于我们在向量空间上的张量，即

$$\begin{aligned}&(\tau\otimes\sigma)(\omega_1,\dots,\omega_p,\omega_{p+1},\dots,\omega_{p+r},X_1,\dots,X_q,X_{q+1},\dots,X_{q+s})\\&\qquad:=\tau(\omega_1,\dots,\omega_p,X_1,\dots,X_q)\,\sigma(\omega_{p+1},\dots,\omega_{p+r},X_{q+1},\dots,X_{q+s}),\end{aligned}$$

其中 $\omega_i\in\Gamma(T^*M)$ 和 $X_i\in\Gamma(TM)$.

因此，我们可以将 M 上的张量场视为 M 上某个张量丛的截面，也就是将分配给每个 $p\in M$ 一个张量（$\mathbb{R}$-重线性映射）的映射，或者视 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 如上所述的多线性映射。我们将始终根据上下文尝试选择最有用或最容易理解的内容。

12 格罗斯曼代数

12.1 微分形式 (Differential forms)

Definition. 设 M 为光滑的微分流形. M 的一个 *(微分)n 形式 (differential) n-form* 是一个 $(0,n)$ 型光滑张量场 ω, 它是完全反对称的, 即

$$\omega(X_1,\dots,X_n)=\operatorname{sgn}(\pi)\,\omega(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(n)}),$$

对于任意 $\pi\in S_n$, $X_i\in\Gamma(TM)$.

Alternatively, we can define a differential form as a smooth section of the appropriate bundle on M, i.e. as a map assigning to each $p\in M$ an n-form on the vector space T_pM. 或者，我们可以将微分形式定义为 M 上适当丛的光滑截面，即定义为向每个 $p\in M$ 分配向量空间 T_pM 上的 n 形式的映射。

Example 12.1. a) 如果流形 M 接受定向坐标卡,即流形 M,即其中所有坐标卡过渡映射（即 $\mathbb{R}^{\dim M}$ 的开放子集之间的映射）都具有正行列式的映射，则称其为*可定向 (orientable)* 的。

如果 M 是可定向的，则在提供体积的 M 上不存在消失的顶部形式（n$n=\dim M$）。

b) 电磁场强度 F 是由电场和磁场构成的微分 2-形式，也可以认为是形式。我们将在后面详细定义。

c) 在经典力学中，如果 Q 是描述可能的系统配置的光滑流形，则相空间为 T^*Q。在为 T^*Q 上存在一个规范定义的 2-形式，称为辛形式，我们将在后面定义。

如果 ω 为 n-形式，则称 n 为 ω 的*度 (degree)*。我们用 $\Omega^n(M)$ 表示 M 上所有微分 n-形式的集合，然后通过逐点定义加法和乘法运算，将其变成 $\mathcal{C}^\infty(M)$-模。

Example 12.2. 当然, 我们有 $\Omega^0(M)\equiv\mathcal{C}^\infty(M)$ 和 $\Omega^1(M)\equiv\Gamma(T^0_1M)\equiv\Gamma(T^*M)$.

与向量空间上的形式相似，对于 $n>\dim M$ 我们有 $\Omega^n(M)=\{0\}$, 否则 $\dim\Omega^n(M)=\binom{\dim M}{n}$, 作为 $\mathcal{C}^\infty(M)$-模.

我们可以将张量的拉回专门化为微分形式。

Definition. 设 $\phi\colon M\to N$ 为光滑映射并设 $\omega\in\Omega^n(N)$. 接着我们将 ω 的 *拉回 (pull-back)* $\Phi^*(\omega)\in\Omega^n(M)$ 定义为

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega)\colon M&\to T^*M\\ p&\mapsto\Phi^*(\omega)(p),\end{aligned}$$

其中

$$\Phi^*(\omega)(p)(X_1,\dots,X_n):=\omega(\phi(p))\big(\phi_*(X_1),\dots,\phi_*(X_n)\big),$$

对于 $X_i\in T_pM$.

映射 $\Phi^*\colon\Omega^n(N)\to\Omega^n(M)$ 是 $\mathbb{R}$-线性的, 它对 $\Omega^0(M)$ 的作用就是

$$\begin{aligned}\Phi^*\colon\Omega^0(M)&\to\Omega^0(M)\\ f&\mapsto\Phi^*(f):=f\circ\phi.\end{aligned}$$

这适用于任何光滑映射 ϕ，并导致我们的口头禅稍作修改：

向量被向前推 (Vectors are pushed forward),
形式被拉回 (forms are pulled back).

由于两种形式的张量积不一定是形式，因此张量积 $\otimes$ 与形式交互作用地不好。因此，我们定义以下内容。

Definition. 设 M 为光滑流形。我们将形式的楔形 *(wedge)* 楔形（或 外部 *(exterior)*）乘积 *product* 定义为映射

$$\begin{aligned}\wedge\colon \Omega^n(M)\times\Omega^m(M) &\to \Omega^{n+m}(M)\\ (\omega,\sigma)&\mapsto \omega\wedge\sigma,\end{aligned}$$

其中

$$(\omega\wedge\sigma)(X_1,\dots,X_{n+m}) := \frac{1}{n!\,m!}\sum_{\pi\in S_{n+m}}\operatorname{sgn}(\pi)(\omega\otimes\sigma)(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(n+m)})$$

且 $X_1,\dots,X_{n+m}\in\Gamma(TM)$. 为了方便, 对于任意 $f,g\in\Omega^0(M)$ 和 $\omega\in\Omega^n(M)$, 我们设

$$f\wedge g := fg \qquad \text{and} \qquad f\wedge\omega=\omega\wedge f=f\omega.$$

Example 12.3. 假设 $\omega,\sigma\in\Omega^1(M)$. 于是, 对任意 $X,Y\in\Gamma(TM)$

$$\begin{aligned}(\omega\wedge\sigma)(X,Y)&=(\omega\otimes\sigma)(X,Y)-(\omega\otimes\sigma)(Y,X)\\&=(\omega\otimes\sigma)(X,Y)-\omega(Y)\sigma(X)\\&=(\omega\otimes\sigma)(X,Y)-(\sigma\otimes\omega)(X,Y)\\&=(\omega\otimes\sigma-\sigma\otimes\omega)(X,Y).\end{aligned}$$

因此

$$\omega\wedge\sigma=\omega\otimes\sigma-\sigma\otimes\omega.$$

楔积在 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 上是双线性的, 即

$$(f\omega_1+\omega_2)\wedge\sigma=f\,\omega_1\wedge\sigma+\omega_2\wedge\sigma,$$

对于所有 $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, $\omega_1,\omega_2\in\Omega^n(M)$ 和 $\sigma\in\Omega^m(M)$, 第二个参数也类似。

Remark 12.4. 如果 (U,x) 是 M 上的一个坐标卡, 于是每个 n-形式 $\omega\in\Omega^n(U)$ 可以在 U 上局部地表示为

$$\omega=\omega_{a_1\cdots a_n}\,\mathrm{d}x^{a_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{a_n},$$

其中 $\omega_{a_1\cdots a_n}\in\mathcal{C}^\infty(U)$ 和 $1\le a_1<\cdots<a_n\le\dim M$. 上面出现的 $\mathrm{d}x^{a_i}$ 是协向量场（1-形式）.

$$\mathrm{d}x^{a_i}\colon p\mapsto \mathrm{d}_px^{a_i}.$$

回拉分布在楔积上。

Theorem 12.5. *设 $\phi\colon M\to N$ 为光滑的, $\omega\in\Omega^n(N)$ 和 $\sigma\in\Omega^m(N)$. 于是我们有*

$$\Phi^*(\omega\wedge\sigma)=\Phi^*(\omega)\wedge\Phi^*(\sigma).$$

Proof. 设 $p\in M$ 和 $X_1,\dots,X_{n+m}\in T_pM$. 于是我们有

$$\begin{aligned}&\big(\Phi^*(\omega)\wedge\Phi^*(\sigma)\big)(p)(X_1,\dots,X_{n+m})\\&\quad=\frac{1}{n!\,m!}\sum_{\pi\in S_{n+m}}\operatorname{sgn}(\pi)\big(\Phi^*(\omega)\otimes\Phi^*(\sigma)\big)(p)(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(n+m)})\\&\quad=\frac{1}{n!\,m!}\sum_{\pi\in S_{n+m}}\operatorname{sgn}(\pi)\Phi^*(\omega)(p)(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(n)})\\&\qquad\qquad\qquad\Phi^*(\sigma)(p)(X_{\pi(n+1)},\dots,X_{\pi(n+m)})\\&\quad=\frac{1}{n!\,m!}\sum_{\pi\in S_{n+m}}\operatorname{sgn}(\pi)\omega(\phi(p))\big(\phi_*(X_{\pi(1)}),\dots,\phi_*(X_{\pi(n)})\big)\\&\qquad\qquad\qquad\sigma(\phi(p))\big(\phi_*(X_{\pi(n+1)}),\dots,\phi_*(X_{\pi(n+m)})\big)\\&\quad=\frac{1}{n!\,m!}\sum_{\pi\in S_{n+m}}\operatorname{sgn}(\pi)(\omega\otimes\sigma)(\phi(p))\big(\phi_*(X_{\pi(1)}),\dots,\phi_*(X_{\pi(n+m)})\big)\\&\quad=(\omega\wedge\sigma)(\phi(p))\big(\phi_*(X_1),\dots,\phi_*(X_{n+m})\big)\\&\quad=\Phi^*(\omega\wedge\sigma)(p)(X_1,\dots,X_{n+m}).\end{aligned}$$

由于 $p\in M$ 是任意的，因此可以得出以下结论。 □

12.2 格罗斯曼代数 (The Grassmann algebra)

注意，楔乘积采用两种微分形式，并产生不同类型的微分形式。在 $\wedge$ 的作用下有一个封闭的空间会更好。实际上，存在这样一个空间，它被称为 M 的 Grassmann 代数。

Definition. 设 M 为光滑流形。定义 $\mathcal{C}^\infty(M)$-模

$$\mathrm{Gr}(M) \equiv \Omega(M) := \bigoplus_{n=0}^{\dim M} \Omega^n(M).$$

M 上的 *格罗斯曼代数 (Grassmann algebra)* on M 是代数 $(\Omega(M), +, \cdot, \wedge)$, 其中

$$\wedge\colon \Omega(M) \times \Omega(M) \to \Omega(M)$$

是先前定义的 $\wedge\colon \Omega^n(M) \times \Omega^m(M) \to \Omega^{n+m}(M)$. 的线性延续.

回想一下，模的直和具有模的笛卡尔积，作为基础 (underlying) 的集集合，而模操作则是按分量定义的。另外，请注意，此处的“代数”实际上是指“模上的代数”。

Example 12.6. 设 $\psi = \omega + \sigma$, 其中 $\omega \in \Omega^1(M)$, $\sigma \in \Omega^3(M)$. 当然，“+” 既不是 $\Omega^1(M)$ 上的加法，也不是 $\Omega^3(M)$ 上的加法，而是 $\Omega(M)$ 上的加法，实际上是 $\psi \in \Omega(M)$。

令 $\varphi \in \Omega^n(M)$, 对于一些 n. 则

$$\varphi \wedge \psi = \varphi \wedge (\omega + \sigma) = \varphi \wedge \omega + \varphi \wedge \sigma,$$

其中 $\varphi \wedge \omega \in \Omega^{n+1}(M)$, $\varphi \wedge \sigma \in \Omega^{n+3}(M)$, $\varphi \wedge \psi \in \Omega(M)$.

Example 12.7. 关于*格拉斯曼数 (Grassmann numbers)*，特别是在超对称性方面，有很多讨论。人们经常听到这些是“不是对易而是反对易的数字”。当然，对象本身不能交换或反交换。这些限定符 (qual-ifiers) 仅适用于对对象的操作。实际上，格拉斯曼数仅仅是格拉斯曼代数的元素。

以下结果是关于 $\wedge$ 的反对易行为。

Theorem 12.8. *设 $\omega \in \Omega^n(M)$, $\sigma \in \Omega^m(M)$. 于是*

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{nm}\, \sigma \wedge \omega.$$

我们称 $\wedge$ is *分次交换 (graded commutative)*, 也就是说，它满足取决于形式程度的反可交换性 (the degrees of the forms)。

Proof. 首先请注意，如果 $\omega, \sigma \in \Omega^1(M)$，则

$$\omega \wedge \sigma = \omega \otimes \sigma - \sigma \otimes \omega = -\,\sigma \wedge \omega.$$

回想一下 $\omega \in \Omega^n(M)$ 和 $\sigma \in \Omega^m(M)$，然后局部地在坐标卡（(U, x) 上我们可以写

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{a_1\cdots a_n} \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n}\\ \sigma &= \sigma_{b_1\cdots b_m} \mathrm{d}x^{b_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{b_m}\end{aligned}$$

其中 $1 \le a_1 < \cdots < a_n \le \dim M$ 对于 b_i 同样如此. 系数 $\omega_{a_1\cdots a_n}$ 和 $\sigma_{b_1\cdots b_m}$ 是 $\mathcal{C}^\infty(U)$ 中的平滑函数。由于 $\mathrm{d}x^{a_i}, \mathrm{d}x^{b_j} \in \Omega^1(M)$，我们有

$$\begin{aligned}\omega \wedge \sigma &= \omega_{a_1\cdots a_n}\sigma_{b_1\cdots b_m}\, \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n} \wedge \mathrm{d}x^{b_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{b_m}\\ &= (-1)^n\, \omega_{a_1\cdots a_n}\sigma_{b_1\cdots b_m}\, \mathrm{d}x^{b_1} \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n} \wedge \mathrm{d}x^{b_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{b_m}\\ &= (-1)^{2n}\, \omega_{a_1\cdots a_n}\sigma_{b_1\cdots b_m}\, \mathrm{d}x^{b_1} \wedge \mathrm{d}x^{b_2} \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n} \wedge \mathrm{d}x^{b_3} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{b_m}\\ &\ \ \vdots\\ &= (-1)^{nm}\, \omega_{a_1\cdots a_n}\sigma_{b_1\cdots b_m}\, \mathrm{d}x^{b_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{b_m} \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n}\\ &= (-1)^{nm}\, \sigma \wedge \omega\end{aligned}$$

因为我们已经多次交换了 nm 次 1-形式。 $\square$

Remark 12.9. 我们应该强调，只有当 ω 和 σ 是纯度数形式 (pure degree forms)，而不是不同度数形式的线性组合时，这才是正确的。确实，如果 $\varphi, \psi \in \Omega(M)$，则公式

$$\varphi \wedge \psi = \cdots \psi \wedge \varphi$$

这在原则上是没有意义的，因为 φ 和 ψ 的不同部分可能具有不同的换向行为。

12.3 外导数 (The exterior derivative)

回忆一下在点 $p \in M$ 处的梯度算子的定义。我们可以扩展该定义以定义（$\mathbb{R}$-线性）算子：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\colon \mathcal{C}^\infty(M) &\xrightarrow{\sim} \Gamma(T^*M) \\ f &\mapsto \mathrm{d}f \end{aligned}$$

当然，其中 $\mathrm{d}f\colon p \mapsto \mathrm{d}_p f$。或者，我们可以将 $\mathrm{d}f$ 视为 $\mathbb{R}$ 线性映射

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f\colon \Gamma(TM) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(M) \\ X &\mapsto \mathrm{d}f(X) = X(f). \end{aligned}$$

Remark 12.10. 在 M 上的某些坐标卡 (U, x) 上，协向量场 (或 1-形式）$\mathrm{d}f$ 可以表示为

$$\mathrm{d}f = \lambda_a \, \mathrm{d}x^a$$

对于一些光滑函数 $\lambda_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$。为了确定它们是什么，我们只需将坐标卡的两边都应用到矢量场即可。我们有

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right) = \frac{\partial}{\partial x^b}(f) = \partial_b f$$

和

$$\lambda_a \, \mathrm{d}x^a\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right) = \lambda_a \frac{\partial}{\partial x^b}(x^a) = \lambda_a \, \delta^a_b = \lambda_b.$$

因此，在 (U, x) 上 $\mathrm{d}f$ 的局部表达式为

$$\mathrm{d}f = \partial_a f \, \mathrm{d}x^a.$$

请注意，运算符 d 满足 Leibniz 规则

$$\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g.$$

我们也可以将其理解为采用 0-形式并输出 1-形式的运算符

$$\mathrm{d}\colon \Omega^0(M) \xrightarrow{\sim} \Omega^1(M).$$

然后可以将其扩展到对任何 n-形式起作用的运算符。我们将需要以下定义。

Definition. 令 M 为光滑流形，令 $X, Y \in \Gamma(TM)$。X 和 Y 的对易括号（或 Lie 括号）定义为

$$\begin{aligned} [X, Y]\colon \mathcal{C}^\infty(M) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(M) \\ f &\mapsto [X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)), \end{aligned}$$

这里我们将向量场的定义用作 R-线性映射 $\mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(M)$.

Definition. M 的外导数 *(exterior derivative)* 是 R-线性算子

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\colon \Omega^n(M) &\xrightarrow{\sim} \Omega^{n+1}(M) \\ \omega &\mapsto \mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

$\mathrm{d}\omega$ 被定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X_1, \ldots, X_{n+1}) := &\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i\big(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1})\big) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}\big), \end{aligned}$$

其中 $X_i \in \Gamma(TM)$, 帽子表示 omissions.

Remark 12.11. 注意，运算符 d 仅在作用于形式时才定义明确。为了在一般张量上定义一个导数算子，我们将需要在可微流形上增加额外的结构。

Example 12.12. 在 $n=1$ 的情况下，$\mathrm{d}\omega \in \Omega^2(M)$ 的形式为

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

让我们检查一下这确实是 2-形式的，即反对称的 $\mathcal{C}^\infty(M)$-多线性映射

$$\mathrm{d}\omega\colon \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to \mathcal{C}^\infty(M).$$

通过使用李括号的反对称性，我们立即得到

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = -\,\mathrm{d}\omega(Y,X).$$

此外，由于这种身份，仅检查第一个参数中的 $\mathcal{C}^\infty(M)$-线性就足够了。易加性易于检查

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X_1+X_2,Y) &= (X_1+X_2)(\omega(Y)) - Y(\omega(X_1+X_2)) - \omega([X_1+X_2,Y])\\
&= X_1(\omega(Y)) + X_2(\omega(Y)) - Y(\omega(X_1)+\omega(X_2)) - \omega([X_1,Y]+[X_2,Y])\\
&= X_1(\omega(Y)) + X_2(\omega(Y)) - Y(\omega(X_1)) - Y(\omega(X_2)) - \omega([X_1,Y]) - \omega([X_2,Y])\\
&= \mathrm{d}\omega(X_1,Y) + \mathrm{d}\omega(X_2,Y).
\end{aligned}$$

For $\mathcal{C}^\infty(M)$-scaling, first we calculate $[fX,Y]$. Let $g\in\mathcal{C}^\infty(M)$. Then

$$\begin{aligned}
[fX,Y](g) &= fX(Y(g)) - Y(fX(g))\\
&= fX(Y(g)) - fY(X(g)) - Y(f)X(g)\\
&= f(X(Y(g)) - Y(X(g))) - Y(f)X(g)\\
&= f[X,Y](g) - Y(f)X(g)\\
&= (f[X,Y] - Y(f)X)(g).
\end{aligned}$$

因此

$$[fX,Y] = f[X,Y] - Y(f)X.$$

因此, 我们可以计算

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(fX,Y) &= fX(\omega(Y)) - Y(\omega(fX)) - \omega([fX,Y])\\
&= fX(\omega(Y)) - Y(f\omega(X)) - \omega(f[X,Y] - Y(f)X)\\
&= fX(\omega(Y)) - fY(\omega(X)) - Y(f)\omega(X) - f\omega([X,Y]) + \omega(Y(f)X)\\
&= fX(\omega(Y)) - fY(\omega(X)) - \cancel{Y(f)\omega(X)} - f\omega([X,Y]) + \cancel{Y(f)\omega(X)}\\
&= f\,\mathrm{d}\omega(X,Y),
\end{aligned}$$

这就是我们想要的。

外部导数满足楔形乘积的莱布尼兹规则的渐变 (graded version) 版本。

Theorem 12.13. 令 $\omega\in\Omega^n(M)$, $\sigma\in\Omega^m(M)$. 于是

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\sigma) = \mathrm{d}\omega\wedge\sigma + (-1)^n\,\omega\wedge\mathrm{d}\sigma.$$

Proof. 我们将在局部坐标下工作。令 (U,x) 为 M 上的坐标卡并写

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_{a_1\cdots a_n}\mathrm{d}x^{a_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{a_n} =: \omega_A\mathrm{d}x^A\\
\sigma &= \sigma_{b_1\cdots b_m}\mathrm{d}x^{b_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{b_m} =: \sigma_B\mathrm{d}x^B.
\end{aligned}$$

在本地，外部导数运算符 d 充当

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_A\wedge\mathrm{d}x^A.$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega\wedge\sigma) &= \mathrm{d}(\omega_A\sigma_B\,\mathrm{d}x^A\wedge\mathrm{d}x^B)\\
&= \mathrm{d}(\omega_A\sigma_B)\wedge\mathrm{d}x^A\wedge\mathrm{d}x^B\\
&= (\sigma_B\mathrm{d}\omega_A+\omega_A\mathrm{d}\sigma_B)\wedge\mathrm{d}x^A\wedge\mathrm{d}x^B\\
&= \sigma_B\mathrm{d}\omega_A\wedge\mathrm{d}x^A\wedge\mathrm{d}x^B+\omega_A\mathrm{d}\sigma_B\wedge\mathrm{d}x^A\wedge\mathrm{d}x^B\\
&= \sigma_B\mathrm{d}\omega_A\wedge\mathrm{d}x^A\wedge\mathrm{d}x^B+(-1)^n\omega_A\mathrm{d}x^A\wedge\mathrm{d}\sigma_B\wedge\mathrm{d}x^B\\
&= \sigma_B\mathrm{d}\omega\wedge\mathrm{d}x^B+(-1)^n\omega_A\mathrm{d}x^A\wedge\mathrm{d}\sigma\\
&= \mathrm{d}\omega\wedge\sigma+(-1)^n\,\omega\wedge\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$

由于我们已经通过 n-形式 $\mathrm{d}x^A$ 对 1-形式 $\mathrm{d}\sigma_B$ 进行了“反对易”，因此在此过程中获得了 n 个负号。

□

外导数的重要性质如下。

Theorem 12.14. 设 $\phi\colon M\to N$ 为光滑的. 对于任意 $\omega\in\Omega^n(N)$, 我们有

$$\Phi^*(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(\Phi^*(\omega)).$$

Proof (sketch). 我们首先证明这适用于 0-形式（即光滑函数）。

令 $f\in\mathcal{C}^\infty(N)$, $p\in M$, $X\in T_pM$. 于是

$$
\begin{aligned}
\Phi^*(\mathrm{d}f)(p)(X) &= \mathrm{d}f(\phi(p))(\phi_*(X)) && (\ \Phi^*\ \text{的定义})\\
&= \phi_*(X)(f) && (\mathrm{d}f\ \text{的定义})\\
&= X(f\circ\phi) && (\phi_*\ \text{的定义})\\
&= \mathrm{d}(f\circ\phi)(p)(X) && (\ \mathrm{d}(f\circ\phi)\ \text{的定义})\\
&= \mathrm{d}(\Phi^*(f))(p)(X) && (\ \Phi^*\ \text{的定义}),
\end{aligned}
$$

于是我们有 $\Phi^*(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}(\Phi^*(f))$.

总的结果来自 Φ^* 的线性和回拉分布在楔形积上的事实。 □

Remark 12.15. 非正式地，我们可以将该结果写为 $\Phi^*\mathrm{d}=\mathrm{d}\Phi^*$，并说外导数随着回拉而“换向”。

但是，请记住，语句中出现的两个 d 是两个不同的运算符。在左侧，是 $\mathrm{d}\colon\Omega^n(N)\to\Omega^{n+1}(N)$, 在右侧它是 $\mathrm{d}\colon\Omega^n(M)\to\Omega^{n+1}(M)$.

Remark 12.16. 当然，我们也可以将算子 d 合并为一个作用于 M 上的格拉斯曼代数的算子

$$\mathrm{d}\colon\Omega(M)\to\Omega(M)$$

通过线性连续。

Example 12.17. 在麦克斯韦电动力学的现代公式中，电场 E 和磁场 B 在 $\mathbb{R}^3$ 上分别为 1-形式和 2-形式：

$$
\begin{aligned}
E &:= E_x\mathrm{d}x+E_y\mathrm{d}y+E_z\mathrm{d}z\\
B &:= B_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+B_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

然后将电磁场强度 F 定义为 $\mathbb{R}^4$ 上的 2-形式

$$F:=B+E\wedge\mathrm{d}t.$$

在分量中，我们可以写

$$F=F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu,$$

其中 $(\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3) \equiv (\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ 和

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

场强满足方程式

$$\mathrm{d}F = 0.$$

这被称为齐次麦克斯韦方程，实际上，它等效于两个齐次麦克斯韦（向量）方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

为了将剩余的麦克斯韦方程式转化为微分形式的语言，我们需要对形式进行进一步的运算，称为霍奇星 (Hodge star) 算子。

回想一下电动力学的标准理论，上面的两个方程式暗示着存在电势和矢量电势 φ 和 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$，满足

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

类似地，$\mathbb{R}^4$ 上的方程 $\mathrm{d}F = 0$ 表示存在 $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ 形式的电磁 4-势（或标称 (gauge) 势）

$$F = \mathrm{d}A.$$

确实，我们可以取

$$A := -\varphi\,\mathrm{d}t + A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z.$$

Definition. 令 M 为光滑流形。如果 $\omega \in \Omega^2(M)$ 且非简并，即 2-形式的 $\omega \in \Omega^2(M)$ 被称为 M 上的*辛形式 (symplectic form)*, 即

$$(\forall Y \in \Gamma(TM) : \omega(X, Y) = 0) \Rightarrow X = 0.$$

配备辛形式的流形称为*辛流形 (symplectic manifold)*。

Example 12.18. 在经典力学的哈密顿量公式中，人们特别对某些相空间 Q 的余切丛 T^*Q 感兴趣。类似于我们引入切丛时所做的事情，我们可以（至少局部地）定义 T^*Q 上的坐标系由 In the Hamiltonian formulation of classical mechanics one is especially interested in the cotangent bundle T^*Q of some configuration space Q. Similarly to what we did when we introduced the tangent bundle, we can define (at least locally) a system of coordinates on T^*Q by

$$(q^1, \ldots, q^{\dim Q}, p_1, \ldots, p_{\dim Q}),$$

其中 p_i 是 Q 上的广义矩，而 q^i 是 Q 上的广义坐标（请记住 $\dim T^*Q = 2\dim Q$）。然后我们可以定义一个 1-形式的 $\theta \in \Omega^1(T^*Q)$.

$$\theta := p_i\,\mathrm{d}q^i$$

称为辛势。如果我们进一步定义

$$\omega := \mathrm{d}\theta \in \Omega^2(T^*Q),$$

然后我们可以计算出

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\theta) = \cdots = 0.$$

而且，ω 是非简并的，因此它是 T^*Q 上的辛形式

12.4 德・拉姆同调 (de Rham cohomology)

最后两个示例提出了两个可能的含义。在电动力学示例中，我们看到了

$$(\mathrm{d}F = 0) \Rightarrow (\exists\, A : F = \mathrm{d}A),$$

而在哈密顿力学的例子中，

$$(\exists\, \theta : \omega = \mathrm{d}\theta) \Rightarrow (\mathrm{d}\omega = 0).$$

Definition. 令 M 为光滑流形，令 $\omega \in \Omega^n(M)$。我们说 ω 是

- *closed* if $\mathrm{d}\omega = 0$;
- *exact* if $\exists\, \sigma \in \Omega^{n-1}(M) : \omega = \mathrm{d}\sigma$.

每个封闭形式是否正确，反之亦然的问题，即, 是否意味着

$$(\mathrm{d}\omega = 0) \Leftrightarrow (\exists\, \sigma : \omega = \mathrm{d}\sigma)$$

一般而言，它属于称为同调理论的数学分支，下面我们将对其进行介绍。

$\Leftarrow$ 方向的答案是肯定的，这要归功于以下结果。

Theorem 12.19. 令 M 为光滑流形。算符

$$\mathrm{d}^2 \equiv \mathrm{d} \circ \mathrm{d} \colon \Omega^n(M) \to \Omega^{n+2}(M)$$

等于零, 即 $\mathrm{d}^2 = 0$.

为了证明，我们将需要以下概念。

Definition. 给定一个带有一些指标的对象，例如 $T_{a_1,\dots,a_n}$，我们定义 $T_{a_1,\dots,a_n}$ 的反对称化 *(antisymmetrization)*

$$T_{[a_1\cdots a_n]} := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, T_{\pi(a_1)\cdots\pi(a_n)}.$$

类似地，$T_{a_1,\dots,a_n}$ 的对称化 *(symmetrization)* 定义为

$$T_{(a_1\cdots a_n)} := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} T_{\pi(a_1)\cdots\pi(a_n)}.$$

一些特殊情况是

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}), \qquad T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba})$$
$$T_{[abc]} = \frac{1}{6}(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} - T_{bac} - T_{cba} - T_{acb})$$
$$T_{(abc)} = \frac{1}{6}(T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} + T_{bac} + T_{cba} + T_{acb})$$

当然，我们只能（反）对称化某些指标

$$T^{ab}{}_{[cd]e} = \frac{1}{2}(T^{ab}{}_{cde} - T^{ab}{}_{dce}).$$

很容易检查缩并 (简写)(例如: 一个求和符号), 我们有

$$T_{a_1\cdots a_n} S^{a_1\cdots[a_i\cdots a_j]\cdots a_n} = T_{a_1\cdots[a_i\cdots a_j]\cdots a_n} S^{a_1\cdots a_n}$$

和

$$T_{a_1\cdots(a_i\cdots a_j)\cdots a_n} S^{a_1\cdots[a_i\cdots a_j]\cdots a_n} = 0.$$

Proof. 这可以使用 d 的定义直接显示。在这里，我们将通过在局部坐标中进行显示来显示它。

回想一下，在局部坐标卡 (U, x) 上，我们可以将任何形式的 $\omega \in \Omega^n(M)$ 编写为

$$\omega = \omega_{a_1 \cdots a_n} \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n}.$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\omega_{a_1 \cdots a_n} \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n} \\ &= \partial_b \omega_{a_1 \cdots a_n} \mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n}, \end{aligned}$$

并因此

$$\mathrm{d}^2\omega = \partial_c \partial_b \omega_{a_1 \cdots a_n} \mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n}.$$

因为 $\mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^b = -\mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^c$, 我们有

$$\mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^b = \mathrm{d}x^{[c} \wedge \mathrm{d}x^{b]}.$$

而且，根据施瓦茨定理，我们有 $\partial_c \partial_b \omega_{a_1 \cdots a_n} = \partial_b \partial_c \omega_{a_1 \cdots a_n}$ 并因此

$$\partial_c \partial_b \omega_{a_1 \cdots a_n} = \partial_{(c} \partial_{b)} \omega_{a_1 \cdots a_n}.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2\omega &= \partial_c \partial_b \omega_{a_1 \cdots a_n} \mathrm{d}x^c \wedge \mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n} \\ &= \partial_{(c} \partial_{b)} \omega_{a_1 \cdots a_n} \mathrm{d}x^{[c} \wedge \mathrm{d}x^{b]} \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{a_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

由于这适用于任何 ω, 我们有 $\mathrm{d}^2 = 0$. □

Corollary 12.20. *每个 exact 形式都是 closed 的.*

通过将 0 中的零映射到 $\Omega^0(M)$ 中的零函数，可以将 d 的作用扩展到零向量空间 $0 := \{0\}$。通过这种方式，我们获得了 $\mathbb{R}$-线性映射的链

$$0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{n+1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{\dim M}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} 0,$$

现在我们将空间 $\Omega^n(M)$ 视为 $\mathbb{R}$-向量空间。回想一下线性代数，给定线性映射 $\phi\colon V \to W$，可以定义 V 的子空间

$$\ker(\phi) := \{v \in V \mid \phi(v) = 0\},$$

回忆 ϕ 的核 *(kernel)*, W 的子空间

$$\mathrm{im}(\phi) := \{\phi(v) \mid v \in V\},$$

称为 ϕ 的图像 *(image)*。

回到我们的映射链，等式 $\mathrm{d}^2 = 0$ 等价于

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}\colon \Omega^n(M) \to \Omega^{n+1}(M)) \subseteq \ker(\mathrm{d}\colon \Omega^{n+1}(M) \to \Omega^{n+2}(M))$$

对于所有 $0 \leq n \leq \dim M - 2$. 而且，我们有

$$\begin{aligned} \omega \in \Omega^n(M) \text{ is closed} &\Leftrightarrow \omega \in \ker(\mathrm{d}\colon \Omega^n(M) \to \Omega^{n+1}(M)) \\ \omega \in \Omega^n(M) \text{ is exact} &\Leftrightarrow \omega \in \mathrm{im}(\mathrm{d}\colon \Omega^{n-1}(M) \to \Omega^n(M)). \end{aligned}$$

上方右侧的传统表示法是

$$\begin{aligned} Z^n &:= \ker(\mathrm{d}\colon \Omega^n(M) \to \Omega^{n+1}(M)), \\ B^n &:= \mathrm{im}(\mathrm{d}\colon \Omega^{n-1}(M) \to \Omega^n(M)), \end{aligned}$$

因此 Z^n 是闭合 (closed)n-形式的空间，而 B^n 是精确 (exact)n-形式的空间。

我们最初的问题可以重申为：对于所有 n，$Z^n = B^n$ 吗？我们已经看到 $\mathrm{d}^2 = 0$ 意味着 $B^n \subseteq Z^n$ 对于所有 n（B^n 实际上是 Z^n 的向量子空间）。不幸的是，一般而言，等式并不成立，但是我们得到了以下结果。

Lemma 12.21 (Poincaré)**.** 令 $M \subseteq \mathbb{R}^d$ 为简单连接的域。然后

$$Z^n = B^n\,, \qquad \forall\, n > 0.$$

在 $Z^n \neq B^n$ 的情况下，我们想通过多少个封闭的 n-形式不准确来量化 (exact)。答案由同调群提供。

Definition. 令 M 为光滑流形。M 上的第 n 个*德拉姆同调群 (de Rham cohomology group)* 是商 $\mathbb{R}$-向量空间

$$H^n(M) := Z^n/B^n.$$

您可以将上述商空间视为 $Z^n/\sim$，其中 $\sim$ 是等价关系

$$\omega \sim \sigma \;:\Leftrightarrow\; \omega - \sigma \in B^n.$$

用同调论解决这个问题的答案是：M 上的每个精确 n-形式也都是封闭 (closed) 的，反之亦然，当且仅当

$$H^n(M) \cong_{\text{vec}} 0.$$

当然，这不是实际答案，而是对问题的另一种重述。但是，如果我们能够确定空间 $H^n(M)$，则可以得到答案。

de Rham 的一个关键定理指出（用更多的技术术语）H$H^n(M)$ 仅取决于 M 的整体拓扑。换句话说，同调群是拓扑不变量。这是非常显着的，因为 $H^n(M)$ 是根据外导数定义的，外部导数与 M 的局部可微结构有关，并且给定的拓扑空间可以配备几个不等价的可微结构。

Example 12.22. 令 M 为任何光滑流形。我们有

$$H^0(M) \cong_{\text{vec}} \mathbb{R}^{(\#\text{ of connected components of } M)}$$

因为封闭的 (closed)0-形式只是 M-上的局部恒定光滑函数。直接的结果是，我们有了

$$H^0(\mathbb{R}) \cong_{\text{vec}} H^0(S^1) \cong_{\text{vec}} \mathbb{R}.$$

Example 12.23. 通过庞加莱 (Poincaré) 引理，我们有

$$H^n(M) \cong_{\text{vec}} 0$$

对于任何简单连通的 $M \subseteq \mathbb{R}^d$.

13 李群

李理论是物理学和微分几何学中最重要的主题。

13.1 李群 (Lie groups)

Definition. 一个*李群 (Lie group)* 是一个群 $(G, \bullet)$，其中 G 是一个光滑流形，并且这些映射

$$\begin{aligned}\mu\colon\ & G \times G \to G \\ & (g_1, g_2) \mapsto g_1 \bullet g_2\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}i\colon & G \to G \\ & g \mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

都是光滑的。请注意，$G \times G$ 继承了 G 的光滑地图册。

Definition. 李群 $(G, \bullet)$ 的*维度 (dimension)* 是作为流形的 G 的维数。

Example 13.1. a) 考虑 $(\mathbb{R}^n, +)$，其中 $\mathbb{R}^n$ 被理解为光滑的 n 维流形。这是一个可交换（或阿贝尔）李群（因为 $\bullet$ 是可交换的），通常称为 n 维传递群。

b) 令 $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$，令 $\cdot$ 是复数的通常乘法。那么 $(S^1, \cdot)$ 是一个可交换的李群，通常表示为 $\mathrm{U}(1)$。

c) 令 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{\phi\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \mid \det \phi \neq 0\}$。注意到线性映射 $\phi\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{2n}$ 之间存在双射，该集合可以具有光滑的 n^2 维流形的结构。条件 $\det \phi \neq 0$ 是所谓的*开放条件 (open condition)* 开放条件，意味着 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 可以用 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开子集识别 (be identified with 恒等映射)，然后从中继承平滑结构。

那么，$(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \circ)$ 是一个称为一般线性群的李群。

d) 设 V 为配备伪内积的 n 维 $\mathbb{R}$-向量空间，即双线性映射 $(-,-)\colon V \times V \to \mathbb{R}$, 满足

i) 对称性: $\forall\, v, w \in V:\ (v, w) = (w, v)$;

ii) 非退化性 (非简并性 non-degeneracy): $(\forall\, w \in V : (v, w) = 0) \Rightarrow v = 0$.

普通内积比非简并满足更强的条件，称为正定性，即 $\forall\, v \in V : (v, v) \geq 0$ and $(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

即使在 V 上有对称双线性映射 $(-,-)$，也总是存在 V 的基数 $\{e_a\}$，使得 $(e_a, e_a) = \pm 1$，否则为零。如果我们得到 p-many 1s 和 q-many -1s（当然，$p + q = n$），那么（(p, q) 被称为映射的 *标志 (signature)*。正定性是标志必须为 $(n, 0)$, 尽管在相对论中要求签名为 $(n-1, 1)$。一个定理指出，（最多同构）V 上的伪内积与不同的签名一样多。

我们可以定义集合

$$\mathrm{O}(p, q) := \{\phi\colon V \xrightarrow{\sim} V \mid \forall\, v, w \in V : (\phi(v), \phi(w)) = (v, w)\}.$$

该二元有序对 $(\mathrm{O}(p, q), \circ)$ 是一个关于伪内积 $(-,-)$ 的称为正交群的李群。实际上，这是 $\mathrm{GL}(p + q, \mathbb{R})$ 的 Lie 子群。一些值得注意的例子是 $\mathrm{O}(3, 1)$，它是相对论的洛伦兹群，$\mathrm{O}(3, 0)$，它是三维旋转群。

Definition. 令 $(G, \bullet)$ 和 $(H, \circ)$ 为李群。映射 $\phi\colon G \to H$ 是群同态且光滑的映射，则为*李群同态 (Lie group homomorphism)* 。Let $(G, \bullet)$ and $(H, \circ)$ be Lie groups. A map $\phi\colon G \to H$ is *Lie group homomorphism* if it is a group homomorphism and a smooth map.

李群同构 (Lie group isomorphism) 是群同态，也是同构。

13.2 左传递映射 (The left translation map

李群的每个元素都有一个特殊的映射。请注意，我们在这里所做的一切都可以通过使用正确的右传递映射来等效地完成。

Definition. 令 $(G, \bullet)$ 为一个李群，令 $g \in G$, 映射

$$\begin{aligned} \ell_g \colon G &\to G \\ h &\mapsto \ell_g(h) := g \bullet h \equiv gh \end{aligned}$$

称为由 g *左传递 (left translation)* 左平移。

如果没有混淆的危险，我们通常会取消 $\bullet$ 符号。

Proposition 13.2. *令 G 为一个李群。对于任何 $g \in G$，左平移图 $\ell_g \colon G \to G$ 是一个微分同胚。*

Proof. 令 $h, h' \in G$. 于是, 我们有

$$\ell_g(h) = \ell_g(h') \;\Leftrightarrow\; gh = gh' \;\Leftrightarrow\; h = h'.$$

此外，对于任何 $h \in G$, 我们有 $g^{-1}h \in G$ 和

$$\ell_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h.$$

因此, ℓ_g 是 G 上的双射. 请注意

$$\ell_g = \mu(g, -)$$

并且因为 $\mu \colon G \times G \to G$ 从定义上说是平滑的，所以 ℓ_g.

逆映射为 $(\ell_g)^{-1} = \ell_{g^{-1}}$, 因为

$$\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g = \ell_g \circ \ell_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G\,.$$

然后，由于与上述相同的原因，g^{-1} 代替 g，逆映 $(\ell_g)^{-1}$ 也是平滑的。因此，映射 ℓ_g 确实是一个微分同胚。 □

请注意，通常情况下，ℓ_g 不是由于组的同构，即

$$\ell_g(hh') \neq \ell_g(h)\,\ell_g(h')$$

一般来说。但是，正如先前证明的最后部分所暗示的，我们确实有

$$\ell_g \circ \ell_h = \ell_{gh}$$

对于所有的 $g, h \in G$.

由于 $\ell_g \colon G \to G$ 是一个微分同胚，所以我们有一个定义明确的前推映射

$$\begin{aligned} (L_g)_* \colon \Gamma(TG) &\to \Gamma(TG) \\ X &\mapsto (L_g)_*(X) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} (L_g)_*(X) \colon G &\to TG \\ h &\mapsto (L_g)_*(X)(h) := (\ell_g)_*(X(g^{-1}h)). \end{aligned}$$

我们可以画图

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "(\ell_g)_*"] & TG \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "\ell_g"] & G \arrow[u, "(L_g)_*(X)"'] \end{tikzcd}$$

请注意，这与我们之前的完全相同

$$\Phi_*(\sigma) := \phi_* \circ \sigma \circ \phi^{-1}.$$

通过引入符号 $X|_h := X(h)$，使得 $X|_h \in T_hG$，我们可以写

$$(L_g)_*(X)|_h := (\ell_g)_*(X|_{g^{-1}h}).$$

另外，回想一下映射 ℓ_g 具有一定的微分同胚性并重新标记 G 的元素，我们可以这样写：

$$(L_g)_*(X)|_{gh} := (\ell_g)_*(X|_h).$$

将向量场 $X \in \Gamma(TG)$ 视为 $\mathbb{R}$-线性映射 $X\colon \mathcal{C}^\infty(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(G)$，可以得到进一步的重构。然后，对于任意 $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$

$$(L_g)_*(X)(f) := X(f \circ \ell_g).$$

Proposition 13.3. 令 G 为一个李群。对于任何 $g, h \in G$，我们有

$$(L_g)_* \circ (L_h)_* = (L_{gh})_*.$$

Proof. 令 $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}\big((L_g)_* \circ (L_h)_*\big)(X)(f) &= (L_g)_*\big((L_h)_*(X)\big)(f)\\ &= (L_h)_*(X)(f \circ \ell_g)\\ &= X(f \circ \ell_g \circ \ell_h)\\ &= X(f \circ \ell_{gh})\\ &=: (L_{gh})_*(X)(f),\end{aligned}$$

正如我们想要展示的。 □

先前的身份也适用于逐点前推，即

$$\big((\ell_{g_1})_* \circ (\ell_{g2})_*\big)(X|_h) = (\ell_{g_1 g_2})_*(X|_h)$$

对于任意 $g_1, g_2, h \in G$ 且 $X|_h \in T_hG$.

13.3 李群的李代数 (The Lie algebra of a Lie group)

在李理论中，我们通常对一般的矢量场不感兴趣，而对特殊类别的矢量场感兴趣，这些矢量场在左传递映射 ℓ_g 的诱导前推下不变

Definition. 令 G 为一个李群。如果满足以下条件，则向量场 $X \in \Gamma(TG)$ 被称为*左不变的 (left-invariant)*

$$\forall\, g \in G : \ (L_g)_*(X) = X.$$

等效地，我们可以要求它保持逐点

$$\forall\, g, h \in G : \ (\ell_g)_*(X|_h) = X|_{gh}.$$

回想一下前推的最后一个公式，我们得出 $X \in \Gamma(TG)$ 在且仅当且仅当是左不变的

$$\forall\, f \in \mathcal{C}^\infty(G) : \ X(f \circ \ell_g) = X(f) \circ \ell_g.$$

我们将 G 上所有左不变矢量场的集合表示为 $\mathcal{L}(G)$。当然，

$$\mathcal{L}(G) \subseteq \Gamma(TG)$$

但是，实际上，更多的是事实。可以检查 $\mathcal{L}(G)$ 是否在

$$\begin{aligned}+&\colon \mathcal{L}(G) \times \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G)\\ \cdot&\colon \mathcal{C}^\infty(G) \times \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G),\end{aligned}$$

仅适用于 $\mathcal{C}^\infty(G)$ 中的常数函数。因此，$\mathcal{L}(G)$ 并非 $\Gamma(TG)$ 的 $\mathcal{C}^\infty(G)$-子模块，而是 $\Gamma(TG)$ 的 $\mathbb{R}$-矢量子空间。

回想一下，到目前为止，我们一直不考虑 $\Gamma(TG)$ 作为 $\mathbb{R}$-向量空间，因为它是无限维的，而且更糟糕的是，基通常是不可数的。先验地，这对于 $\mathcal{L}(G)$ 也是正确的，但是我们将看到，实际上情况要好得多，因为 $\mathcal{L}(G)$ 最终将成为 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间。

Theorem 13.4. *令 G 为一个具有 $e \in G$ 的李群。则 $\mathcal{L}(G) \cong_{\text{vec}} T_eG$.*

Proof. 我们将构造一个线性同构 $j\colon T_eG \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(G)$。定义

$$\begin{aligned} j\colon T_eG &\to \Gamma(TG) \\ A &\mapsto j(A), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} j(A)\colon G &\to TG \\ g &\mapsto j(A)|_g := (\ell_g)_*(A). \end{aligned}$$

i) 首先，我们证明对于任何一个 $A \in T_eG$, $j(A)$ 是 G 上的一个光滑向量场。足以检查对于任何一个 $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$，我们都有 $j(A)(f) \in \mathcal{C}^\infty(G)$。确实

$$\begin{aligned} (j(A)(f))(g) &= j(A)|_g(f) \\ &:= (\ell_g)_*(A)(f) \\ &= A(f \circ \ell_g) \\ &= (f \circ \ell_g \circ \gamma)'(0), \end{aligned}$$

其中，γ 是通过 $e \in G$ 的曲线，其在 e 处的切向量为 A。映射

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} \times G &\to \mathbb{R} \\ (t, g) &\mapsto \varphi(t, g) := (f \circ \ell_g \circ \gamma)(t) \\ &\qquad = f(g\gamma(t)) \end{aligned}$$

是光滑地图的分量，因此也是光滑的。然后

$$(j(A)(f))(g) = (\partial_1 \varphi)(0, g)$$

光滑地取决于于 g 因此 $j(A)(f) \in \mathcal{C}^\infty(G)$.

ii) 令 $g, h \in G$. 于是对于每个 $A \in T_eG$, 我们有

$$\begin{aligned} (\ell_g)_*(j(A)|_h) &:= (\ell_g)_*((\ell_h)_*(A)) \\ &= (\ell_{gh})_*(A) \\ &= j(A)|_{gh}, \end{aligned}$$

于是 $j(A) \in \mathcal{L}(G)$. 因此映射 j 的确是 $j\colon T_eG \to \mathcal{L}(G)$.

iii) 令 $A, B \in T_eG$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$. 于是对于任意 $g \in G$

$$\begin{aligned} j(\lambda A + B)|_g &= (\ell_g)_*(\lambda A + B) \\ &= \lambda(\ell_g)_*(A) + (\ell_g)_*(B) \\ &= \lambda j(A)|_g + j(B)|_g, \end{aligned}$$

因为前推是 $\mathbb{R}$-线性映射。因此，我们有 $j\colon T_eG \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(G)$.

iv) Let $A, B \in T_eG$. 于是

$$\begin{aligned} j(A) = j(B) &\Leftrightarrow \forall\, g \in G : j(A)|_g = j(B)|_g \\ &\Rightarrow j(A)|_e = j(B)|_e \\ &\Leftrightarrow (\ell_e)_*(A) = (\ell_e)_*(B) \\ &\Leftrightarrow A = B, \end{aligned}$$

因为 $(\ell_e)_* = \mathrm{id}_{TG}$. 因此 j 是单射.

v) Let $X \in \mathcal{L}(G)$. Define $A^X := X|_e \in T_eG$. Then, we have

$$j(A^X)|_g = (\ell_g)_*(A^X) = (\ell_g)_*(X|_e) = X_{ge} = X_g,$$

因为 X 是左不变的. 因此 $X = j(A^X)$ 和 j 是满射的.

因此, $j\colon T_eG \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(G)$ 确实是线性同构 □

Corollary 13.5. 空间 $\mathcal{L}(G)$ 是有限维的且 $\dim \mathcal{L}(G) = \dim G$.

我们很快就会看到，$\mathcal{L}(G)$ 和 T_eG 的识别 (the identification) 超出了线性同构的水平，因为它们与李代数是同构的。回想一下，代数场 K 上的李代数是 K 上的向量空间，配备了李括号 $[-\ -]$，即满足 Jacobi 身份的 K-双线性反对称映射。

给定 $X, Y \in \Gamma(TM)$)，我们将它们的李括号或对易算符定义为

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

对于任何 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.。您可以检查确实 $[X, Y] \in \Gamma(TM)$，并且括号是 $\mathbb{R}$-双线性的，反对称的并且满足 Jacobi 恒等式。因此，$(\Gamma(TM), +, \cdot, [-,-])$）是 $\mathbb{R}$ 上的一个无穷维李代数。当从上下文中清楚它们时，我们抑制 $+$ 和 $\cdot$ 。对于也是 Lie 群的流形，我们有以下内容。In the case of a manifold that is also a Lie group, we have the following.

Theorem 13.6. 令 G 为一个李群。那么 $\mathcal{L}(G)$ 是 $\Gamma(TG)$ 的李子代数。

Proof. 李代数的李子代数只是一个向量子空间，它在李括号的作用下是封闭的。因此，我们只需要检查一下

$$\forall\, X, Y \in \mathcal{L}(G) : \ [X, Y] \in \mathcal{L}(G).$$

令 $X, Y \in \mathcal{L}(G)$. 对于任意 $g \in G$ 和 $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, 我们有

$$\begin{aligned}
[X, Y](f \circ \ell_g) &:= X(Y(f \circ \ell_g)) - Y(X(f \circ \ell_g)) \\
&= X(Y(f) \circ \ell_g) - Y(X(f) \circ \ell_g) \\
&= X(Y(f)) \circ \ell_g - Y(X(f)) \circ \ell_g \\
&= \big(X(Y(f)) - Y(X(f))\big) \circ \ell_g \\
&= [X, Y](f) \circ \ell_g.
\end{aligned}$$

因此, $[X, Y]$ 是左不变的 □

Definition. 令 G 为一个阿贝尔群.G 的 联想李代数 *(associated Lie algebra)* 是 $\mathcal{L}(G)$.

注意 $\mathcal{L}(G)$ 是一个相当复杂的对象，因为它的元素是矢量场，因此我们想改用 T_eG(其元素是切向量)。确实，我们可以使用 $L(G)$ 上的括号来定义 T_eG 上的括号，以使它们与李代数同构。首先，让我们定义李代数的同构。

Definition. 令 $(L_1, [-,-]_{L_1})$ 和 $(L_2, [-,-]_{L_2})$ 是同一域上的李代数。线性映射 $\phi\colon L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$ 是李代数的同态

$$\forall\, x, y \in L_1 : \ \phi([x, y]_{L_1}) = [\phi(x), \phi(y)]_{L_2}.$$

如果 ϕ 是双射的，则它是李代数同构 *(Lie algebra isomorphism)*, 我们写成 $L_1 \cong_{\text{Lie alg}} L_2$。

通过使用 $\mathcal{L}(G)$ 上的括号 $[-,-]_{\mathcal{L}(G)}$ ，我们可以为任何 $A, B \in T_eG$ 定义

$$[A, B]_{T_eG} := j^{-1}\big([j(A), j(B)]_{\mathcal{L}(G)}\big),$$

其中 $j^{-1}(X) = X|_e$, 配备了这些括号，我们有

$$\mathcal{L}(G) \cong_{\text{Lie alg}} T_eG.$$

14 李代数分类和邓金图

给定一个李群，我们已经看到了如何构造李代数作为左不变向量场或等价于正切向量的空间。稍后我们将探索相反的方向，即给定一个李代数，我们将看到如何构建一个与其相关的李代数相关的李群。

但是，这里我们将考虑一个与李代数的来源无关的问题，即李代数的分类问题。

14.1 李代数 (Lie algebras)

虽然可以更一般地对李代数进行分类，但我们将仅考虑有限维复李代数的分类，即李代数（$(L,[-,-])$，其中 L 是有限维 $\mathbb{C}$-向量空间。

Example 14.1. 当然，任何复李群 G（其中 G 是复流形）都会产生一个复李代数。

如果 A, B 是 K 上的 Lie 代数 $(L,[-,-])$ 的 Lie 子代数，则

$$[A,B] := \operatorname{span}_K\big(\{[x,y]\in L \mid x\in A \text{ and } y\in B\}\big)$$

再次是 L 的李子代数.

Definition. 如果李代数 L 被称为 *abelian* 的, 如果

$$\forall\, x,y\in L:\ [x,y]=0.$$

等效地，$[L,L]=0$，其中 0 表示平凡的 Lie 代数 $\{0\}$。

Abelian Lie 代数与 Lie 代数非常不有趣：由于方括号完全为零，因此也可能不存在。即使从分类的角度来看，括号的消失也意味着，在给定两个阿贝尔李代数的情况下，其基础向量空间之间的每个线性同构都将自动成为李代数同构。因此，对于每个 $n\in\mathbb{N}$,（直到同构）只有一个阿贝尔 n 维李氏代数。

Definition. 李代数 L 的理想 *(ideal)* 理想 I 是李子代数，使得 $[I,L]\subseteq I$，即

$$\forall\, x\in I:\forall\, y\in L:\ [x,y]\in I.$$

0 理想和 L 称为 L 的 平凡理想 *(trivial ideals)*。

Definition. 一个李代数 L 被称为

- 单的 *(simple)* 如果是非阿贝尔的，并且不包含非平凡的理想;
- 半单的 *(semi-simple)* 如果它不包含非平凡的阿贝尔理想。

Remark 14.2. 注意，任何单李代数也是半单的。单 Lie 代数必须是非阿贝尔的要求是由于一维阿贝尔的 Lie 代数，否则它将是唯一的不是半单的单 Lie 代数。

Definition. 令 L 为李代数。李子代数

$$L' := [L,L]$$

称为 L 的导出子代数 *(derived subalgebra)*。

我们可以形成一个李子代数序列

$$L\supseteq L'\supseteq L''\supseteq\cdots\supseteq L^{(n)}\supseteq\cdots$$

称为 L 的 导出列 *(derived series)* 。

Definition. 如果存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $L^{(k)}=0$, 则李代数 L 是可解的 *(solvable)*。

回想一下，向量空间 $V\oplus W$ 的直和具有 $V\times W$ 作为其 underlying set，并且按分量定义了运算。

Definition. 让 L_1 和 L_2 成为李代数。直和 *(direct sum)*$L_1 \oplus_{\text{Lie}} L_2$ 具有 $L_1 \oplus L_2$ 作为其基础向量空间 (underlying vector space)，Lie 括号定义为

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2]_{L_1 \oplus_{\text{Lie}} L_2} := [x_1, y_1]_{L_1} + [x_2, y_2]_{L_2}$$

对于所有 $x_1, y_1 \in L_1$ 和 $x_2, y_2 \in L_2$。或者，通过分别用 $L_1 \oplus L_2$ 的子空间 $L_1 \oplus 0$ 和 $0 \oplus L_2$ 标识 L_1 和 L_2，我们要求

$$[L_1, L_2]_{L_1 \oplus_{\text{Lie}} L_2} = 0.$$

在下文中，我们将丢弃 “Lie” 下标，并理解 $\oplus$ 表示 $\oplus_{\text{Lie}}$，只要被加数是李代数。

以下是比直和（仅针对李代数定义）弱的概念。

Definition. 令 R 和 L 为李代数。半直和 *(semi-direct sum)*$R \oplus_s L$ 具有 $R \oplus L$ 作为其基础向量空间，并且李括号满足

$$[R, L]_{R \oplus_s L} \subseteq R,$$

即 R 是 $R \oplus_s L$ 的理想.

现在我们准备陈述 Levi's 分解定理。

Theorem 14.3 (Levi). *任何有限维复李代数 L 都可以分解为*

$$L = R \oplus_s (L_1 \oplus \cdots \oplus L_n)$$

式中，R 是可解李代数，$L_1, \ldots, L_n$ 是单李代数。

到目前为止，除某些特殊情况（例如，低维数）外，尚无可解李代数的一般分类。相反，有限维，简单，复杂的李代数已被完全分类。

Proposition 14.4. *Lie 代数是半单的，当且仅当它可以表示为单 Lie 代数的直和。*

因此，单的李代数是构建任何半单的李代数的基础。然后，根据 Levi's 定理，单李代数的分类很容易扩展到所有半单李代数的分类。

14.2 伴随映射和 Killing 形式 (The adjoint map and the Killing form)

Definition. 令 L 为 k 上的李代数，令 $x \in L$。关于 x 的伴随映射为 K-线性映射

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_x \colon L &\xrightarrow{\sim} L \\ y &\mapsto \mathrm{ad}_x(y) := [x, y]. \end{aligned}$$

ad_x 的线性从第二个参数中括号的线性开始，而第一个参数中括号的线性暗示该映射

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} \colon L &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(L) \\ x &\mapsto \mathrm{ad}(x) := \mathrm{ad}_x\,. \end{aligned}$$

本身也是线性的。实际上，更多的是事实。回想一下 $\mathrm{End}(L)$ 是带括号的李代数

$$[\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi.$$

然后，我们有以下内容。

Proposition 14.5. *映射 $\mathrm{ad} \colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(L)$ 是李代数的同构。*

Proof. 仍然需要检查 ad 是否保留括号。让 $x, y, z \in L$. 于是

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{[x,y]}(z) &:= [[x, y], z] && \text{(ad 的定义)} \\ &= -[[y, z], x] - [[z, x], y] && \text{(雅可比恒等式)} \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] && \text{(反对称)} \\ &= \mathrm{ad}_x(\mathrm{ad}_y(z)) - \mathrm{ad}_y(\mathrm{ad}_x(z)) \\ &= (\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x)(z) \\ &= [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z). \end{aligned}$$

因此, 我们有 $\mathrm{ad}([x, y]) = [\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)]$. □

Definition. 令 L 为 K 上的一个 Lie 代数。L 上的 *Killing 形式 (Killing form)* 为 K-双线性映射

$$\begin{aligned}\kappa\colon L\times L &\to K\\ (x,y)&\mapsto \kappa(x,y):=\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x\circ\mathrm{ad}_y),\end{aligned}$$

其中 tr 是向量空间 $\operatorname{End}(L)$ 上的常规的迹。

请注意，在我们先前定义的意义上，Killing 形式不是 “形式 (form)”。实际上，由于 L 是有限维的，所以迹是循环的，因此 κ 是对称的，即。

$$\forall\, x,y\in L:\ \kappa(x,y)=\kappa(y,x).$$

κ 的重要属性是其与方括号的相关性。

Proposition 14.6. *令 L 为李代数。对于任何 $x,y,z\in L$，我们都有*

$$\kappa([x,y],z)=\kappa(x,[y,z]).$$

Proof. 这很容易从以下事实得出：ad 是同态的

$$\begin{aligned}\kappa([x,y],z) &:= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_{[x,y]}\circ\mathrm{ad}_z)\\
&= \operatorname{tr}([\mathrm{ad}_x,\mathrm{ad}_y]\circ\mathrm{ad}_z)\\
&= \operatorname{tr}((\mathrm{ad}_x\circ\mathrm{ad}_y-\mathrm{ad}_y\circ\mathrm{ad}_x)\circ\mathrm{ad}_z)\\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x\circ\mathrm{ad}_y\circ\mathrm{ad}_z)-\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_y\circ\mathrm{ad}_x\circ\mathrm{ad}_z)\\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x\circ\mathrm{ad}_y\circ\mathrm{ad}_z)-\operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x\circ\mathrm{ad}_z\circ\mathrm{ad}_y)\\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x\circ(\mathrm{ad}_y\circ\mathrm{ad}_z-\mathrm{ad}_z\circ\mathrm{ad}_y))\\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x\circ[\mathrm{ad}_y,\mathrm{ad}_z])\\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x\circ\mathrm{ad}_{[y,z]})\\
&=: \kappa(x,[y,z]),\end{aligned}$$

这里使用了迹的周期性。 □

我们可以使用 κ 来进一步表示半单性。

Proposition 14.7 (Cartan's criterion)**.** *当且仅当 Killing 形式 κ 是非简并的，即 Lie 代数 L 是半单的。*

$$(\forall\, y\in L:\kappa(x,y)=0)\Rightarrow x=0.$$

因此，如果 L 是半单的，则 κ 是 L 上的伪内积。从线性代数中调用以下定义。

Definition. 线性映射 $\phi\colon V\xrightarrow{\sim}V$ 相对于 V 上的伪内积 $B(-,-)$ 是对称的, 如果

$$\forall\, v,w\in V:\ B(\phi(v),w)=B(v,\phi(w)).$$

相反，如果我们有

$$\forall\, v,w\in V:\ B(\phi(v),w)=-B(v,\phi(w)),$$

则 ϕ 相对于 B 是*反对称 (anti-symmetric)* 的。

可以说，对于任何 $z\in L$，线性映射相对于 κ 是反对称的，从而可以重申 κ 相对于括号的关联特性, 即

$$\forall\, x,y\in L:\ \kappa(\mathrm{ad}_z(x),y)=-\kappa(x,\mathrm{ad}_z(y)).$$

为了进行计算，在 L 上引入基 $\{E_i\}$ 是有用的。

Definition. 令 L 为 K 上的李代数，令 $\{E_i\}$ 为基。然后，我们有

$$[E_i,E_j]={C^k}_{ij}E_k$$

对于某些 ${C^k}_{ij}\in K$。数字 ${C^k}_{ij}$ 称为相对于基 $\{E_i\}$ 的 L 的*结构常数 (structure constants)*。

就结构常数而言，李括号的反对称性表示为

$$C^k{}_{ij} = -C^k{}_{ji}$$

同时雅可比等式变成

$$C^n{}_{im}C^m{}_{jk} + C^n{}_{jm}C^m{}_{ki} + C^n{}_{km}C^m{}_{ij} = 0.$$

现在，我们可以根据基的分量部分来表达伴随映射和 Killing 形式。

Proposition 14.8. *令 L 为李代数，以 $\{E_i\}$ 为基。然后*

i) $(\mathrm{ad}_{E_i})^k{}_j = C^k{}_{ij}$

ii) $\kappa_{ij} = C^m{}_{ik}C^k{}_{jm}$

其中 $C^k{}_{ij}$ 是相对于 $\{E_i\}$ 的 L 的结构常数。

Proof. i) 用 $\{\varepsilon^i\}$ 表示 $\{E_i\}$. 的对偶基础。然后，我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_{E_i})^k{}_j &:= \varepsilon^k(\mathrm{ad}_{E_i}(E_j))\\ &= \varepsilon^k([E_i, E_j])\\ &= \varepsilon^k(C^m{}_{ij}E_m)\\ &= C^m{}_{ij}\varepsilon^k(E_m)\\ &= C^k{}_{ij},\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon^k(E_m) = \delta^k_m$.

ii) 从线性代数回忆起,如果 V 是有限维的,则对于任何 $\phi \in \mathrm{End}(V)$,我们都有 $\mathrm{tr}(\phi) = \Phi^k{}_k$，其中 Φ 是表示线性映射的矩阵。此外，还记得代表 $\phi \circ \psi$ 的矩阵是乘积 $\Phi\Psi$。使用这些，我们有

$$\begin{aligned}\kappa_{ij} &:= \kappa(E_i, E_j)\\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{E_i} \circ \mathrm{ad}_{E_j})\\ &= (\mathrm{ad}_{E_i} \circ \mathrm{ad}_{E_j})^k{}_k\\ &= (\mathrm{ad}_{E_i})^m{}_k(\mathrm{ad}_{E_j})^k{}_m\\ &= C^m{}_{ik}C^k{}_{jm},\end{aligned}$$

对于线性映射及其矩阵，我们使用相同的符号。 □

14.3 基本根与韦伊群 (The fundamental roots and the Weyl group)

现在，我们将关注有限维半单复 Lie 代数，其分类取决于一种特殊类型的子代数的存在。

Definition. 令 L 为 d 维李代数。L 的嘉当子代数 *(Cartan subalgebra)*, 具有以下性质：存在 H 的基 $\{h_1, \ldots, h_r\}$ 可以扩展到 L 的基 $\{h_1, \ldots, h_r, e_1, \ldots, e_{d-r}\}$ 的，如 $e_1, \ldots, e_{d-r}$ 是任何 $h \in H$ 的 $\mathrm{ad}(h)$ 的特征向量。即

$$\forall\, h \in H : \exists\, \lambda_\alpha(h) \in \mathbb{C} : \ \mathrm{ad}(h)e_\alpha = \lambda_\alpha(h)e_\alpha,$$

对每个 $1 \le \alpha \le d - r$.

基 $\{h_1, \ldots, h_r, e_1, \ldots, e_{d-r}\}$ 被称为 L 的 *Cartan-Weyl basis*

Theorem 14.9. *令 L 为有限维半单复李代数。然后*

i) *L 具有一个 Cartan 子代数;*

ii) *L 的所有 Cartan 子代数具有相同的维数，称为 L 的秩* (rank)。

iii) *L 的 Cartan 子代数中的任何一个都是阿贝尔的。*

请注意，我们可以将上面出现的 λ_α 看作是一个映射 $\lambda_\alpha\colon H \to \mathbb{C}$。而且，对于任何 $z \in \mathbb{C}$ 和 $h, h' \in H$，我们有

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(zh+h')e_\alpha &= \mathrm{ad}(zh+h')e_\alpha\\ &= [zh+h', e_\alpha]\\ &= z[h,e_\alpha]+[h',e_\alpha]\\ &= z\lambda_\alpha(h)e_\alpha + \lambda_\alpha(h')e_\alpha\\ &= (z\lambda_\alpha(h)+\lambda_\alpha(h'))e_\alpha,\end{aligned}$$

因此，λ_α 是 $\mathbb{C}$-线性映射 $\lambda_\alpha\colon H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$，因此 $\lambda_\alpha \in H^*$。

Definition. 映射 $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-r} \in H^*$ 被称为 L 的根 *(roots)*。

$$\Phi := \{\lambda_\alpha \mid 1 \le \alpha \le d-r\} \subseteq H^*$$

称为 L 的根集 *(root set)*.

可以证明，如果 λ_α 为零映射，那么我们将有 $e_\alpha \in H$。因此，我们必须有 $0 \notin \Phi$.。请注意，每个 $\mathrm{ad}(h)$ 关于 Killing 形式 的反对称性的结果是

$$\lambda \in \Phi \;\Rightarrow\; -\lambda \in \Phi.$$

因此，Φ 不是 H^* 的线性独立子集。

Definition. 一个基本根集 *(fundamental roots)* 基本根集 $\Pi := \{\pi_1, \dots, \pi_f\}$ 是一个子集 $\Pi \subseteq \Phi$ 使得

a) Π 是 H^* 的线性独立子集。;

b) 对于每个 $\lambda \in \Phi$, 存在 $n_1, \dots, n_f \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ 使得

$$\lambda = \varepsilon \sum_{i=1}^{f} n_i \pi_i.$$

我们可以更简洁地将最后一个方程写为 $\lambda \in \mathrm{span}_{\varepsilon,\mathbb{N}}(\Pi)$. 观察到，对于任何 $\lambda \in \Phi$, $\pi_1, \dots, \pi_f$ 的系数以上的扩展始终具有相同的符号。确实，我们有 $\mathrm{span}_{\varepsilon,\mathbb{N}}(\Pi) \neq \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(\Pi)$.

Theorem 14.10. *令 L 为有限维半单复李代数。然后*

i) 基本根的集合 $\Pi \subseteq \Phi$ 总是存在;

ii) 我们有 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Pi) = H^*$, 也就是说，$\Pi$ 是 H^* 的基

Corollary 14.11. *我们有 $|\Pi| = r$, 其中 r 是 L 的秩.*

Proof. 因为 Π 是一个基, $|\Pi| = \dim H^* = \dim H = r$. □

现在，我们想使用 κ 来定义 H^* 上的伪内积。从线性代数我们知道，在 K 上的有限维向量空间 V 上的伪内积 $B(-,-)$ 引起线性同构

$$\begin{aligned} i\colon V &\xrightarrow{\sim} V^*\\ v &\mapsto i(v) := B(v,-)\end{aligned}$$

可以用来在 V^* 上定义伪内积 $B^*(-,-)$ 成如下:

$$\begin{aligned} B^*\colon V^* \times V^* &\to K\\ (\phi,\psi) &\mapsto B^*(\phi,\psi) := B(i^{-1}(\phi), i^{-1}(\psi)).\end{aligned}$$

我们想将其应用于对 Cartan 次代数的 κ 限制。但是，向量空间上的伪内积不一定是子空间上的伪内积，因为在子空间上考虑非简并性条件可能会失败。

Proposition 14.12. *κ 对 H 的限制是 H 上的伪内积。*

Proof. 自动满足双线性和对称性。尚需证明 κ 在 H 上未退化。

i) 令 $\{h_1,\dots,h_r,e_{r+1},\dots,e_d\}$ 是 L 的 Cartan-Weyl 基，则令 $\lambda_\alpha\in\Phi$。于是

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(h_j)\kappa(h_i,e_\alpha)&=\kappa(h_i,\lambda_\alpha(h_j)e_\alpha)\\&=\kappa(h_i,[h_j,e_\alpha])\\&=\kappa([h_i,h_j],e_\alpha)\\&=\kappa(0,e_\alpha)\\&=0.\end{aligned}$$

由于 $\lambda_\alpha\neq 0$，所以有一些 h_j 使得 $\lambda_\alpha(h_j)\neq 0$，因此

$$\kappa(h_i,e_\alpha)=0.$$

通过线性，对于任何 $h\in H$ 和任何 e_α，我们都有 $\kappa(h,e_\alpha)=0$.

ii) 令 $h\in H\subseteq L$。由于 κ 在 L 上不退化，我们有

$$\big(\forall\, x\in L:\kappa(h,x)=0\big)\Rightarrow h=0.$$

在 Cartan-Weyl 基础上将 $x\in L$ 展开为

$$x=h'+e$$

其中 $h':=x^ih_i$, $e:=x^\alpha e_\alpha$。然后，我们有

$$\kappa(h,x)=\kappa(h,h')+x^\alpha\kappa(h,e_\alpha)=\kappa(h,h').$$

因此，非退化条件为

$$\big(\forall\, h'\in H:\kappa(h,h')=0\big)\Rightarrow h=0,$$

这就是我们想要的。 □

我们现在可以定义

$$\begin{aligned}\kappa^*\colon H^*\times H^*&\to\mathbb{C}\\(\mu,\nu)&\mapsto\kappa^*(\mu,\nu):=\kappa(i^{-1}(\mu),i^{-1}(\nu)),\end{aligned}$$

其中 $i\colon H\xrightarrow{\sim}H^*$ 是由 κ. 引起的线性同构。

Remark 14.13. 如果 $\{h_i\}$ 是 H 的基数，则相对于对偶基数的 κ^* 分量满足

$$(\kappa^*)^{ij}\kappa_{jk}=\delta^i_k.$$

因此，我们可以写

$$\kappa^*(\mu,\nu)=(\kappa^*)^{ij}\mu_i\nu_j,$$

其中 $\mu_i:=\mu(h_i)$.

现在我们将注意力转向实子代数 $H^*_{\mathbb{R}}:=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\Pi)$。请注意，我们具有以下包含链

$$\Pi\subseteq\Phi\subseteq\mathrm{span}_{\varepsilon,\mathbb{N}}(\Pi)\subseteq\underbrace{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\Pi)}_{H^*_{\mathbb{R}}}\subseteq\underbrace{\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Pi)}_{H^*}.$$

κ^* 对 $H^*_{\mathbb{R}}$ 的限制导致令人惊讶的结果。

Theorem 14.14. *i) 对任意 $\alpha,\beta\in H^*_{\mathbb{R}}$, 我们有 $\kappa^*(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$.*

ii) $\kappa^*\colon H^*_{\mathbb{R}}\times H^*_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ 是 $H^*_{\mathbb{R}}$ 上的一个内积.

这确实是一个惊喜！在限制 $H^*_{\mathbb{R}}$ 时，κ^* 的非简并性不会减弱，反而会增强到正定性。现在我们有了一个适当的实积，我们可以从基本线性代数定义一些熟悉的概念，例如长度和角度。

Definition. 设 $\alpha, \beta \in H^*_{\mathbb{R}}$. 于是, 我们有

i) α 的长度 *(length)* 为 $|\alpha| := \sqrt{\kappa^*(\alpha, \alpha)}$;

ii) α 和 β 之间的角度 *(angle)* 为 $\varphi := \cos^{-1}\left(\dfrac{\kappa^*(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\right)$.

我们需要一种最终成分用于分类结果。

Definition. 对于任意 $\lambda \in \Phi \subseteq H^*_{\mathbb{R}}$, 定义线性映射

$$\begin{aligned} s_\lambda \colon H^*_{\mathbb{R}} &\xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{R}} \\ \mu &\mapsto s_\lambda(\mu), \end{aligned}$$

其中

$$s_\lambda(\mu) := \mu - 2\frac{\kappa^*(\lambda,\mu)}{\kappa^*(\lambda,\lambda)}\,\lambda.$$

映射 s_λ 被称为一个 韦伊变换 *(Weyl transformation)* 和集合

$$W := \{s_\lambda \mid \lambda \in \Phi\}$$

是根据地图组成的一个群，称为 *Weyl* 群 *(Weyl group)*.

Theorem 14.15. *i) Weyl* 群 W 是由 Π 的基本根生成的, 在某种意义上, 对于 $1 \le n \le r$, 其中 $r = |\Pi|$,

$$\forall\, w \in W : \exists\, \pi_1, \dots, \pi_n \in \Pi : \;\; w = s_{\pi_1} \circ s_{\pi_2} \circ \cdots \circ s_{\pi_n};$$

ii) 每个根都可以通过 W 的作用从基本根产生，即

$$\forall\, \lambda \in \Phi : \exists\, \pi \in \Pi : \exists\, w \in W : \;\; \lambda = w(\pi);$$

iii) Weyl 群对根进行排列，即

$$\forall\, \lambda \in \Phi : \forall\, w \in W : \;\; w(\lambda) \in \Phi.$$

14.4 邓金图和嘉当分类 (Dynkin diagrams and the Cartan classification)

对于任何 $\pi_i, \pi_j \in \Pi$，考虑 Weyl 变换的作用

$$s_{\pi_i}(\pi_j) := \pi_j - 2\frac{\kappa^*(\pi_i,\pi_j)}{\kappa^*(\pi_i,\pi_i)}\,\pi_i.$$

由于 $s_{\pi_i}(\pi_j) \in \Phi$ 和 $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\varepsilon,\mathbb{N}}(\Pi)$，因此对于所有 $1 \le i \ne j \le r$ 我们有

$$-2\frac{\kappa^*(\pi_i,\pi_j)}{\kappa^*(\pi_i,\pi_i)} \in \mathbb{N}.$$

Definition. 李代数的 *Cartan matrix* 是具有条目的 $r \times r$ 矩阵 C

$$C_{ij} := 2\frac{\kappa^*(\pi_i,\pi_j)}{\kappa^*(\pi_i,\pi_i)},$$

其中 C_{ij} 不应将其与结构常数 ${C^k}_{ij}$ 混淆.

Theorem 14.16. *对于每个单的有限维复 Lie 代数，都有一个唯一的 Cartan 矩阵，反之亦然（直到重新标注基元素）。*

当然，并非每个矩阵都可以是 Cartan 矩阵。例如，由于 $C_{ii} = 2$（不暗示求和），所以 C 的对角线条目都等于 2，而非对角线条目要么为零，要么为负数。通常，$C_{ij} \neq C_{ji}$，因此 Cartan 矩阵不是对称的，但是如果 $C_{ij} = 0$，则 $C_{ji} = 0$.。

因此，我们已经将将简单的有限维复李代数分类的问题减少到了找到所有卡丹矩阵的问题。反过来，这可以简化为确定所有不等价的 Dynkin 图的问题。

Definition. 给定一个嘉当矩阵 C, 第 ij-个 键数 *(bond number)* 是

$$n_{ij} := C_{ij}C_{ji} \qquad (\text{无求和约定}).$$

请注意，我们有

$$\begin{aligned} n_{ij} &= 4\,\frac{\kappa^*(\pi_i,\pi_j)}{\kappa^*(\pi_i,\pi_i)}\,\frac{\kappa^*(\pi_j,\pi_i)}{\kappa^*(\pi_j,\pi_j)} \\ &= 4\left(\frac{\kappa^*(\pi_i,\pi_j)}{|\pi_i||\pi_j|}\right)^2 \\ &= 4\cos^2\varphi, \end{aligned}$$

φ 是 π_i 与 π_j 之间的夹角。对于 $i \neq j$，角度 φ 既不为零也不为 180°，因此 $0 \leq \cos^2\varphi < 1$，因此

$$n_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

因为对于 $i \neq j$,$C_{ij} \leq 0$，所以唯一的可能性是

C_{ij}	C_{ji}	n_{ij}
0	0	0
−1	−1	1
−1	−2	2
−1	−3	3

注意，虽然 Cartan 矩阵不是对称的，但交换任何一对 C_{ij} 和 C_{ji} 都会得到一个 Cartan 矩阵，它表示与原始矩阵相同的李代数，并且交换了 Cartan-Weyl 基中的两个元素。这就是我们没有将 $(-2\ -1)$ 和 $(-3\ -1)$ 包括在上表中的原因。

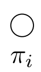
如果 $n_{ij} = 2$ 或 3，则对应的基本根具有不同的长度，即 $|\pi_i| < |\pi_j|$ 或 $|\pi_i| > |\pi_j|$。我们还有以下结果。

Proposition 14.17. *单李代数的根至多有两个截然不同的长度。*

上面突出显示的 Cartan 矩阵的冗余性通过考虑 Dynkin 图得到了很好的解决。

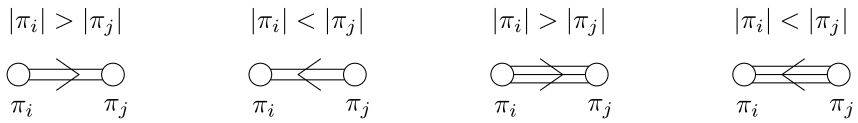
Definition. 与 Cartan 矩阵相关的邓金图 *(Dynkin diagram)*。

1. 为 $\pi_i \in \Pi$ 中的每个基本根画一个圆；



2. 在表示根 π_i 和 π_j 的圆之间画 n_{ij} 条直线；

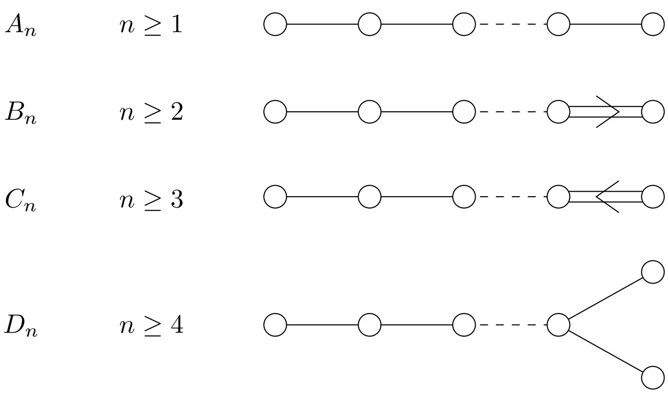
3. 如果 $n_{ij} = 2$ 或 3，则在从较长的根到较短的根的线上画一个箭头。



Dynkin 图完全刻画了任何基本根的集合，我们可以利用 Weyl 变换从这些基本根集合重构整个根集。然后，根集可以用来产生 Cartan-Weyl 基。我们现在终于准备好陈述期待已久的分类定理了。

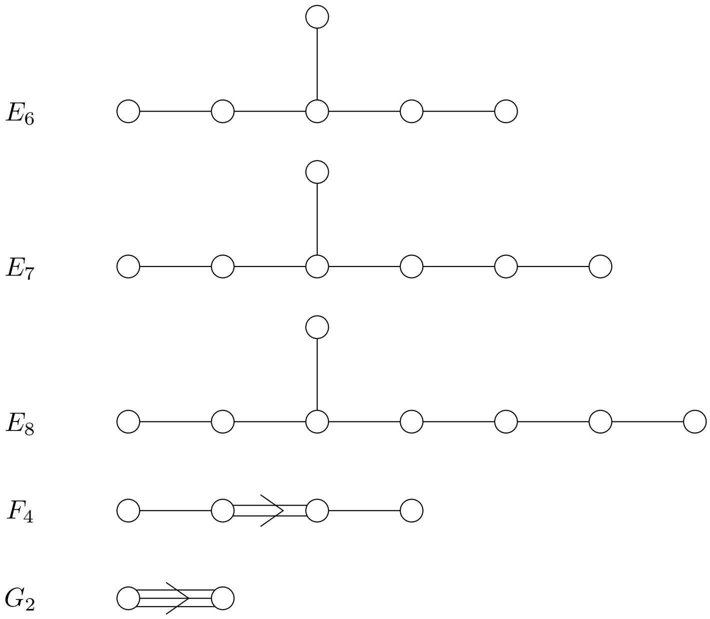
Theorem 14.18 (Killing, Cartan)**.** *任何单有限维复李代数都可以从它的基本根集合 Π 重构，这些基本根只能以下列形式出现。*

i) 有 4 个无穷族 (infinite families)



其中，对 n 的限制确保我们不会得到重复的图 (图 D_2 被排除在外，因为它是不连通的，并且不对应于一个单李代数)。

ii) 五个例外情况



没有其他的了。这些都是可能的 (连通的)Dynkin 图。

最后，我们实现了对所有有限维单复李代数的分类。有限维半单复李代数是单李代数的直和，对应于连通分量为上述连通分量的不连通 Dynkin 图。

15 李群 SL(2, C) 和李代数 sl(2,C)

15.1 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的结构

回想一下，李群结构是一些更简单结构的组合，我们现在将详细研究 $\mathbb{C}$ 上的特殊的 2 次线性群，也称为*相对论自旋群 relativistic spin group*。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$: 作为一个集合

我们定义 $\mathbb{C}^4 := \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 的以下子集

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; ad-bc=1 \right\},$$

其中数组只是四元组的另一种表示法。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$：作为一个群

我们定义了一种操作

$$\begin{aligned} \bullet\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) &\to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}.$$

形式上，此运算与矩阵乘法相同。我们可以直接检查应用 $\bullet$ 的结果是否回到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$，或者简单地回想一下乘积的行列式是行列式的乘积。此外，运算 $\bullet$

i) 具有关联性 (简单但检查起来很繁琐)；

ii) 具有单位元，即 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$;

iii) 允许逆：对于每个 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, 我们有 $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 和

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，我们有 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

因此，二元有序对 $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),\bullet)$ 是一个 (非交换) 群。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$：作为一个拓扑空间

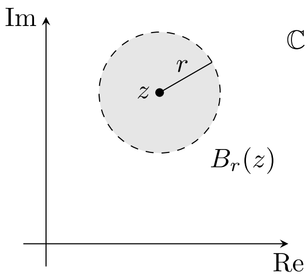
回想一下，如果 N 是 M 的子集，$\mathcal{O}$ 是 M 上的拓扑，那么我们可以用从 M 继承的子集拓扑来装备 N

$$\mathcal{O}|_N := \{U\cap N \mid U\in\mathcal{O}\}.$$

我们首先在 $\mathbb{C}$ 上建立一个拓扑，如下所示。令

$$B_r(z) := \{y\in\mathbb{C} \mid |z-y|<r\}$$

是半径 $r>0$，中心 $z\in\mathbb{C}$ 的开球。



通过以下方式隐式定义 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

$$U \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \;:\Leftrightarrow\; \forall\, z \in U : \exists\, r > 0 : B_r(z) \subseteq U.$$

则二元有序对 $(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ 对是拓扑空间。事实上，我们有

$$(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}) \cong_{\text{top}} (\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\text{std}}).$$

然后，我们可以为 $\mathbb{C}^4$ 配备产品拓扑，这样我们就可以最终定义

$$\mathcal{O} := (\mathcal{O}_{\mathbb{C}})|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})},$$

使得对 $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \mathcal{O})$ 是拓扑空间。事实上，它是一个连通的拓扑空间，我们稍后将需要这个性质。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$: 作为一个拓扑流形

回想一下，拓扑空间 $(M, \mathcal{O})$ 是复拓扑流形，如果每个点 $p \in M$ 都有一个开邻域 $U(P)$，它与 $\mathbb{C}^d$ 的开子集同胚。等价地，一定存在 $\mathcal{C}^0$-地图册，即坐标卡 (U_α, x_α) 的集合 $\mathscr{A}$ ，其中 U_α 是开的并且覆盖 M，并且每个 x 是 $\mathbb{C}^d$ 子集上的同胚。

设 U 为集合

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; a \neq 0 \right\}$$

并定义映射

$$\begin{aligned} x\colon \quad & U \to x(U) \subseteq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c), \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$。只要做一点工作，就可以证明 U 是 $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \mathcal{O})$ 的开子集，x 是具有逆的同胚 where $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. With a little work, one can show that U is an open subset of $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \mathcal{O})$ and x is a homeomorphism with inverse

$$\begin{aligned} x^{-1}\colon \quad & x(U) \to U \\ & (a, b, c) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

但是，因为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 包含 $a = 0$ 的元素，所以坐标卡 (U, x) 没有覆盖整个空间，因此我们至少还需要一个坐标卡。因此，我们定义了集合

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; b \neq 0 \right\}$$

还有映射

$$\begin{aligned} y\colon \quad & V \to x(V) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, d). \end{aligned}$$

与上面类似，V 是开的，y 是逆同胚

$$\begin{aligned} y^{-1}\colon\quad & x(V)\to V \\ & (a,b,d)\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{ad-1}{b} & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的一个元素不能 a 和 b 都等于零，否则 $ad-bc=0\neq 1$。因此 $\mathscr{A}_{\text{top}}:=\{(U,x),(V,y)\}$ 是一个地图册,并且由于每个地图册自动是一个 $\mathcal{C}^0$-地图册,所以这个三元组 $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),\mathcal{O},\mathscr{A}_{\text{top}})$ 是一个三维、复杂的拓扑流形。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$：作为一个复微分流形

回想一下，要从具有坐标卡 A 的拓扑流形中获得 $\mathcal{C}^1$-可微流形，我们必须检查 $\mathscr{A}$ 中的每个图之间的过渡映射在通常意义上都是可微的。

在我们的案例中，我们有坐标卡 $\mathscr{A}_{\text{top}}:=\{(U,x),(V,y)\}$. 我们估算

$$(y\circ x^{-1})(a,b,c)=y(\begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{pmatrix})=(a,b,\tfrac{1+bc}{a}).$$

因此，我们有了过渡映射

$$\begin{aligned} y\circ x^{-1}\colon & x(U\cap V)\to y(U\cap V) \\ & (a,b,c)\mapsto (a,b,\tfrac{1+bc}{a}). \end{aligned}$$

同样，我们也有

$$(x\circ y^{-1})(a,b,d)=y(\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{ad-1}{b} & d \end{pmatrix})=(a,b,\tfrac{ad-1}{b}).$$

因此，另一个过渡映射是

$$\begin{aligned} x\circ y^{-1}\colon & y(U\cap V)\to x(U\cap V) \\ & (a,b,c)\mapsto (a,b,\tfrac{ad-1}{b}). \end{aligned}$$

由于 $a\neq 0$ 和 $b\neq 0$，转换映射是复数可微的 (这是回顾复分析的好时机！)

因此，“$\mathscr{A}_{\text{top}}$ 坐标卡”是可微分的坐标卡。通过定义 $\mathscr{A}$ 是包含 $\mathscr{A}_{\text{top}}$ 的最大可微坐标卡，我们得到 $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),\mathcal{O},\mathscr{A})$ 是一个三维复可微流形。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$: 作为一个李群

我们给 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 配备了群结构和流形结构。为了得到李群结构，我们必须检查这两个结构是否相容，也就是说，我们必须证明这两个映射

$$\begin{aligned} \mu\colon & \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\to\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\ & (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix})\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} i\colon & \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\to\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

关于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 上的可微结构是可微的。例如，对于逆映射 i，我们必须证明映射 $y\circ i\circ x^{-1}$ 对于任意一对坐标卡 $(U,x),(V,y)\in\mathscr{A}$ 通常是可微的。

$$\begin{tikzcd} U\subseteq\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "x"] & V\subseteq\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \arrow[d, "y"] \\ x(U)\subseteq\mathbb{C}^3 \arrow[r, "y\circ i\circ x^{-1}"] & y(V)\subseteq\mathbb{C}^3 \end{tikzcd}$$

然而，由于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 是连通的，$\mathscr{A}$ 中转移映射的可微性意味着如果 $y\circ i\circ x^{-1}$ 对任意两个给定坐标卡是可微的，那么它对 $\mathscr{A}$ 中的所有图都是可微的。因此，我们可以简单地设 (U,x) 和 (V,y) 是上面定义的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 上的两个坐标卡。那么我们有

$$(y\circ i\circ x^{-1})(a,b,c)=(y\circ i)(\begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a}\end{pmatrix})=y(\begin{pmatrix} \frac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a\end{pmatrix})=(\tfrac{1+bc}{a},-b,a)$$

它作为 $\mathbb{C}^3$ 的开子集之间的映射当然是复可微的 (回想起 $x(U)$ 上的 $a\neq 0$)。

检查 μ 是否复数可微稍微复杂一些，因为我们首先必须为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 配备合适的“乘积可微结构”，然后如上所述进行。一旦这样做了，我们就可以最终得出结论：$((\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),\mathcal{O},\mathscr{A}),\bullet)$ 是一个三维复李群。

15.2 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的李代数

回想一下，对于每个李群 G，都有一个相关的李代数 $\mathcal{L}(G)$,，其中

$$\mathcal{L}(G):=\{X\in\Gamma(TG)\mid \forall\, g,h\in G:(\ell_g)_*(X|_h)=X_{gh}\},$$

然后我们证明了它与带李括号的李代数 T_eG 同构。

$$[A,B]_{T_eG}:=j^{-1}([j(A),j(B)]_{\mathcal{L}(G)})$$

由 $\mathcal{L}(G)$ 上的 Lie 括号通过同构 j 诱导

$$j(A)|_g:=(\ell_g)_*(A).$$

在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的情况下，$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ 的左平移映射为

$$\begin{aligned}\ell_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)}:\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})&\to\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\\ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} e & f \\ g & h\end{pmatrix}\end{aligned}$$

通过使用标准符号 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\equiv\mathcal{L}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$，我们有

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\cong_{\text{Lie alg}}T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

现在我们想要显式地确定 $T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 上的李括号，从而确定它的结构常数

回想一下，如果 (U,x) 是流形 M 上的坐标卡且 $p\in U$, 则坐标卡 (U,x) 导出切线空间 T_pM 的基。我们将在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 上使用先前定义的坐标卡 (U,x)，其中 $U:=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\mid a\neq 0\}$

$$\begin{aligned}x:\quad U&\to x(U)\subseteq\mathbb{C}^3\\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}&\mapsto(a,b,c).\end{aligned}$$

注意，这里出现的 d 是完全多余的，因为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的成员条件强制 (forces 产生?)$d=\frac{1+bc}{a}$。但是，我们将继续写入 d，以避免在下标中出现矩阵中的分数。

坐标卡 (U,x) 包含 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$，因此我们得到一个诱导坐标基 (co-ordinate basis)

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}\in T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\ \middle|\ 1\leq i\leq 3\right\}$$

因此任何 $A\in T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 都可以写成

$$A=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}+\beta\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}+\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)},$$

对于某些 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$，由于 Lie 括号是双线性的，它在这些基向量上的作用通过线性连续唯一地扩展到整个 $T_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$。因此，我们只需确定 $\mathfrak{sl}(2\,\mathbb{C})$ 的李括号在这些基向量的同构 j 下对图像的作用。

现在让我们确定这些坐标诱导基元在同构 j 下的像。该对象

$$j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right)\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$$

是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 上的左不变向量场。它为每个点 $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in U\subseteq\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 指定切向量

$$j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right)\Bigg|_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}:=\left(\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\right)_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\in T_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

该切向量是 $C-$ 线性映射 $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}$，其中 $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 上光滑复值函数的 $C-$ 向量空间 (实际上，$C-$ 代数)，尽管，准确地说，由于我们在坐标卡中工作，我们应该只考虑定义在 U 上的函数。对于我们具有的任何 $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$(对 U 的限制)，显式地，

$$\begin{aligned}\left(\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\right)_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}(f)&=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\left(f\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\right)\\&=\partial_i\left(f\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1}\right)\left(x\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right),\end{aligned}$$

其中，最后一行中的 ∂_i 的自变量是映射 $x(U)\subseteq\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$，因此 ∂_i 简单地是关于映射 $f\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1}$ 的第 i 个 (来自 3 个) 复变量的复微分运算，然后在 $x\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{C}^3$ 处求值。通过在构图中插入单位元，我们拥有

$$\begin{aligned}&=\partial_i\left(f\circ\mathrm{id}_U\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1}\right)\left(x\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)\\&=\partial_i\left(f\circ(x^{-1}\circ x)\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1}\right)\left(x\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)\\&=\partial_i\left((f\circ x^{-1})\circ(x\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1})\right)\left(x\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right),\end{aligned}$$

其中 $f\circ x^{-1}\colon x(U)\subseteq\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$ 且 $(x\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1})\colon x(U)\subseteq\mathbb{C}^3\to x(U)\subseteq\mathbb{C}^3$ 因此，我们可以使用多维链式规则来获得

$$=\left(\partial_m(f\circ x^{-1})\left((x\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1})(x\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))\right)\right)\left(\partial_i(x^m\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1})(x\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))\right),$$

总和从 $m=1$ 到 $m=3$。第一个因子很简单

$$\begin{aligned}\partial_m(f\circ x^{-1})\left((x\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)})\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)=&\ \partial_m(f\circ x^{-1})(x\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right))\\&=:\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}(f).\end{aligned}$$

为了了解第二个因子是什么，我们首先考虑映射 $x^m\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1}$。此映射作用于三元组 $(e,f,g)\in x(U)$ 为

$$\begin{aligned}(x^m\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\circ x^{-1})(e,f,g)&=(x^m\circ\ell_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)})\begin{pmatrix}e&f\\g&\frac{1+fg}{e}\end{pmatrix}\\&=x^m(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}e&f\\g&\frac{1+fg}{e}\end{pmatrix})\\&=x^m(\begin{pmatrix}ae+bg&af+\frac{b(1+fg)}{e}\\ce+dg&cf+\frac{d(1+fg)}{e}\end{pmatrix}),\end{aligned}$$

由于 $x^m := \mathrm{proj}_m \circ x$，其中 $m \in \{1,2,3\}$，我们有

$$(x^m \circ \ell_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \circ x^{-1})(e,f,g) = \mathrm{proj}_m(ae+bg, af+\tfrac{b(1+fg)}{e}, ce+dg),$$

映射 proj_m 简单地选取三元组的第 m 个分量。现在，我们必须将 ∂_i 应用于此映射，$i \in \{1,2,3\}$，也就是说，我们必须对三个复变量 e、f 和 g 中的每一个进行微分。我们可以将结果写为

$$\partial_i(x^m \circ \ell_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \circ x^{-1})(e,f,g) = D(e,f,g)^m{}_i,$$

其中 m 标记矩阵的行，i 标记矩阵的列

$$D(e,f,g) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -\frac{b(1+fg)}{e^2} & a+\frac{bg}{e} & \frac{bf}{e} \\ c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

最后，通过在 $(e,f,g) = x\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (1,0,0)$ 处对其进行估算，我们得到

$$\partial_i(x^m \circ \ell_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \circ x^{-1})(x\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)) = D^m{}_i,$$

其中，通过回忆 $d = \frac{1+bc}{a}$，

$$D := D(1,0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -b & a & 0 \\ c & 0 & \frac{1+bc}{a} \end{pmatrix}.$$

把这两个因子放在一起会产生

$$\left(\ell_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}\right)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(f) = D^m{}_i \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(f).$$

由于这对于任意 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ 都成立，所以我们有

$$j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}\right)\Bigg|_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} := \left(\ell_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}\right)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = D^m{}_i \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)},$$

由于点 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in U \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 也是任意的，我们有

$$j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}\right) = D^m{}_i \frac{\partial}{\partial x^m} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}),$$

其中 D 现在是坐标函数的相应矩阵

$$D := \begin{pmatrix} x^1 & 0 & x^2 \\ -x^2 & x^1 & 0 \\ x^3 & 0 & \frac{1+x^2x^3}{x^1} \end{pmatrix}.$$

Note that while the three vector fields

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^m} \colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) &\to T\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \end{aligned}$$

不是单独左不变的，它们与系数 $D^m{}_i$ 线性组合确实是左不变的。回想一下，这些向量场

i) 是 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^m} \colon \mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \\ f &\mapsto \partial_m(f \circ x^{-1}) \circ x; \end{aligned}$$

ii) 满足莱布尼茨规则

$$\frac{\partial}{\partial x^m}(fg) = f\frac{\partial}{\partial x^m}(g) + g\frac{\partial}{\partial x^m}(f);$$

iii) 作用于坐标函数 $x^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ 得到

$$\frac{\partial}{\partial x^m}(x^i) = \partial_m(x^i \circ x^{-1}) \circ x = \partial_m(\mathrm{proj}_i \circ x \circ x^{-1}) \circ x = \delta^i_m \circ x = \delta^i_m,$$

因为常量函数与任何可组合函数的组合就是常量函数。

因此，我们得到了在 j 下的 $T_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的基的映射的像的展开式

$$\begin{aligned}
j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right) &= x^1\frac{\partial}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}\\
j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right) &= x^1\frac{\partial}{\partial x^2}\\
j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right) &= x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + \tfrac{1+x^2x^3}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

现在我们必须计算每一对的括号 (以 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 表示)。我们也可以一次做完所有的动作，这在指标运算中是一个很好的练习。我们有

$$\left[j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right), j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right)\right] = \left[D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}, D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}\right].$$

根据定义，允许此操作作用于任意 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$

$$\left[D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}, D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}\right](f) := D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}\left(D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}(f)\right) - D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}\left(D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(f)\right).$$

第一个项给出了

$$\begin{aligned}
D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}\left(D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}(f)\right) &= D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_k\,\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x)\\
&= D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_k)\,(\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x) + D^m{}_iD^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^m}(\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x)\\
&= D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_k)\,(\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x) + D^m{}_iD^n{}_k\,\partial_m(\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x\circ x^{-1})\circ x\\
&= D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_k)\,(\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x) + D^m{}_iD^n{}_k\,\partial_m\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x.
\end{aligned}$$

同样，我们也有

$$D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}\left(D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(f)\right) = D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}(D^m{}_i)\,(\partial_m(f\circ x^{-1})\circ x) + D^n{}_kD^m{}_i\,\partial_n\partial_m(f\circ x^{-1})\circ x.$$

因此，回想起 Schwarz 定理 $\partial_m\partial_n = \partial_n\partial_m$ ，我们有

$$\begin{aligned}
\left[D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}, D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}\right](f) &= D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_k)\,(\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x) + \cancel{D^m{}_iD^n{}_k\,\partial_m\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x}\\
&\quad - D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}(D^m{}_i)\,(\partial_m(f\circ x^{-1})\circ x) - \cancel{D^n{}_kD^m{}_i\,\partial_n\partial_m(f\circ x^{-1})\circ x}\\
&= \left(D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_k) - D^m{}_k\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_i)\right)\partial_n(f\circ x^{-1})\circ x\\
&= \left(D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_k) - D^m{}_k\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_i)\right)\frac{\partial}{\partial x^n}(f),
\end{aligned}$$

在那里我们重新标记了一些虚拟索引。由于 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ 是任意的，

$$\left[D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}, D^n{}_k\frac{\partial}{\partial x^n}\right] = \left(D^m{}_i\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_k) - D^m{}_k\frac{\partial}{\partial x^m}(D^n{}_i)\right)\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

我们现在可以明确地评估这一点。对于 $i=1$ 和 $k=2$，我们有

$$\begin{aligned}
\left[D^m{}_1\frac{\partial}{\partial x^m}, D^n{}_2\frac{\partial}{\partial x^n}\right] &= \left(\cancel{D^m{}_1\frac{\partial}{\partial x^m}(D^1{}_2)} - D^m{}_2\frac{\partial}{\partial x^m}(D^1{}_1)\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\\
&\quad + \left(D^m{}_1\frac{\partial}{\partial x^m}(D^2{}_2) - D^m{}_2\frac{\partial}{\partial x^m}(D^2{}_1)\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\\
&\quad + \left(\cancel{D^m{}_1\frac{\partial}{\partial x^m}(D^3{}_2)} - D^m{}_2\frac{\partial}{\partial x^m}(D^3{}_1)\right)\frac{\partial}{\partial x^3}\\
&= -D^1{}_2\frac{\partial}{\partial x^1} + (D^1{}_1 + D^2{}_2)\frac{\partial}{\partial x^2} - D^3{}_2\frac{\partial}{\partial x^3}\\
&= 2x^1\frac{\partial}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

类似地，我们计算

$$\begin{aligned}
\left[D^m{}_1\frac{\partial}{\partial x^m}, D^n{}_3\frac{\partial}{\partial x^n}\right] &= \left(D^m{}_1\frac{\partial}{\partial x^m}(D^1{}_3) - D^m{}_3\frac{\partial}{\partial x^m}(D^1{}_1)\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\\
&\quad + \left(\cancel{D^m{}_1\frac{\partial}{\partial x^m}(D^2{}_3)} - D^m{}_3\frac{\partial}{\partial x^m}(D^2{}_1)\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\\
&\quad + \left(D^m{}_1\frac{\partial}{\partial x^m}(D^3{}_3) - D^m{}_3\frac{\partial}{\partial x^m}(D^3{}_1)\right)\frac{\partial}{\partial x^3}\\
&= -2x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - 2(\tfrac{1+x^2x^3}{x^1})\frac{\partial}{\partial x^3}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\left[D^m{}_2\frac{\partial}{\partial x^m}, D^n{}_3\frac{\partial}{\partial x^n}\right] &= \left(D^m{}_2\frac{\partial}{\partial x^m}(D^1{}_3) - \cancel{D^m{}_3\frac{\partial}{\partial x^m}(D^1{}_2)}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\\
&\quad + \left(\cancel{D^m{}_2\frac{\partial}{\partial x^m}(D^2{}_3)} - D^m{}_3\frac{\partial}{\partial x^m}(D^2{}_2)\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\\
&\quad + \left(D^m{}_2\frac{\partial}{\partial x^m}(D^3{}_3) - \cancel{D^m{}_3\frac{\partial}{\partial x^m}(D^3{}_2)}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}\\
&= (D^2{}_1 - D^1{}_3)\frac{\partial}{\partial x^1} + D^2{}_3\frac{\partial}{\partial x^2} - D^3{}_2\frac{\partial}{\partial x^3}\\
&= x^1\frac{\partial}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3},
\end{aligned}$$

这里我们使用的微分规则来自向量场 $\frac{\partial}{\partial x^m}$ 的定义，莱布尼兹规则，以及坐标函数上的作用量。

通过将正在恒等式上求值的 j^{-1} 应用于这些向量场，我们最终看到 $T_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 上的诱导李括号满足

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right] &= 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\\
\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}, \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right] &= -2\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\\
\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}, \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right] &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}.
\end{aligned}$$

因此，$T_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 相对于坐标基的结构常数为

$$C^2{}_{12} = 2, \qquad C^3{}_{13} = -2, \qquad C^1{}_{23} = 1,$$

所有其他的要么为零，要么通过反对称与这些相关。

16 李代数的 Dynkin 图，反之亦然

16.1 The simplicity of $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

我们已经看到，$T_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的非零结构常数为

$$C^2{}_{12}=2,\qquad C^3{}_{13}=-2,\qquad C^1{}_{23}=1,$$

加上那些与反对称相关的。

Proposition 16.1. 两个李代数 A 和 B 同构的充要条件是存在 A 的基和 B 的基，其中 A 和 B 的结构常数相同。

由于我们已经证明了对任何李群 G 都有 $T_eG\cong_{\text{Lie alg}}\mathcal{L}(G)$，所以我们可以推导出 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个基 $\{X_1,X_2,X_2\}$ 的存在性，它的结构常数就是上面列出的那些。换句话说，我们有

$$\begin{aligned}[X_1,X_2]&=2X_2,\\ [X_1,X_3]&=-2X_3,\\ [X_2,X_3]&=X_1.\end{aligned}$$

在此基础上，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 Killing 形式具有组成部分

$$\kappa_{ij}=C^m{}_{in}C^n{}_{jm},$$

所有的指数都在 1 到 3 之间。明确地说，我们有

$$\begin{aligned}\kappa_{11}&=C^m{}_{1n}C^n{}_{1m}\\ &=\cancel{C^1{}_{1n}C^n{}_{11}}+C^2{}_{1n}C^n{}_{12}+C^3{}_{1n}C^n{}_{13}\\ &=C^2{}_{12}C^2{}_{12}+C^3{}_{13}C^3{}_{13}\\ &=8.\end{aligned}$$

由于 κ 是对称的，所以我们只需要确定 κ_{ij} 的 $i\le j$。通过将组件写入 3×3 数组，我们发现

$$[\kappa_{ij}]=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&-8&0\\0&0&8\end{pmatrix},$$

这只是一种速记，意思是

$$\kappa(X_1,X_1)=8,\qquad\kappa(X_2,X_2)=-8,\qquad\kappa(X_3,X_3)=8,$$

当 $i\neq j$ 时 $\kappa(X_i,X_j)=0$.

Proposition 16.2. 李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是半单的。

Proof. 因为 κ 的对角线条目都是非零的，所以 Killing 形式是非退化的。根据 Cartan 准则，这意味着 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是半单的。 □

Remark 16.3. 还有一件事可以从 κ 的分量中读出，那就是它是一种未定义 *(indefinite)* 的形式，即 $\kappa(X,X)$ 的符号可以是正的，也可以是负的，这取决于我们选择哪个 $X\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$。

李理论的一个结果表明，紧李群的李代数上的 Killing 形式总是负半定的，即对于李代数中的所有 X,$\kappa(X,X)$ 总是负的或零的。因此，我们可以得出结论：$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 不是紧李群。compact Lie group.

事实上，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 不仅仅是半单的。

Proposition 16.4. 李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是简单的。

回想一下，如果李代数不包含非平凡理想，并且李代数 L 的理想 I 是 L 的李子代数，则称其为单李代数。

$$\forall x\in I:\forall y\in L:\ [x,y]\in I.$$

Proof. 考虑 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的理想

$$I := \{\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 \mid \alpha,\beta,\gamma \text{ restricted so that } I \text{ is an ideal}\}.$$

因为括号是双线性的，所以检查用 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的每个基向量将 I 的任意元素括起来的结果就足够了。我们发现

$$\begin{aligned}
[\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3, X_1] &= -2\beta X_1 + 2\gamma X_3,\\
[\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3, X_2] &= 2\alpha X_2 - \gamma X_1,\\
[\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3, X_3] &= -2\alpha X_3 + \beta X_1.
\end{aligned}$$

我们需要选择 α,β,γ，这样结果总是返回到 I。当然，我们可以选择 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ 和 $\alpha=\beta=\gamma=0$，它们分别对应于平凡理想 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 和 0。如果 α,β,γ 都不是零，那么你可以检查上面的右手边是否是线性独立的，这样 I 就包含了三个线性独立的向量。因为 n 维向量空间的唯一 n 维子空间是向量空间本身，所以我们有 $I=L$。因此，我们剩下以下情况：

i) 如果 $\alpha=0$, 则 $I\subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\{X_2,X_3\})$ 因此我们也必须有 $\beta=\gamma=0$；

ii) 如果 $\beta=0$, 则 $I\subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\{X_1,X_3\})$, 因此我们也必须有 $\alpha=0$, so that in fact $I\subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\{X_3\})$, 因此 $\gamma=0$；

iii) 如果 $\gamma=0$, 则 $I\subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\{X_1,X_2\})$, 因此我们也必须有 $\alpha=0$, so that in fact $I\subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\{X_2\})$, 因此 $\beta=0$.

在所有情况下，我们都有 $I=0$。因此，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 不存在非平凡理想。 □

16.2 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的根和邓金图

通过观察 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 基元的括号关系，可以看出

$$H := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\{X_1\})$$

是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 Cartan 子代数。实际上，对于任何 $h\in H$，都存在一个 $\xi\in\mathbb{C}$，使得 $h=\xi X_1$，因此我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(h)X_2 &= \xi[X_1,X_2] = 2\xi X_2,\\
\operatorname{ad}(h)X_3 &= \xi[X_1,X_3] = -2\xi X_3.
\end{aligned}$$

回想一下，在关于李代数的一节中，我们用泛函 $\lambda_2,\lambda_3\in H^*$ 重新解释了这些本征值方程

$$\begin{aligned}
\lambda_2\colon\quad H &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C} & \qquad \lambda_3\colon\quad H &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\\
\xi X_1 &\mapsto 2\xi, & \xi X_1 &\mapsto -2\xi
\end{aligned}$$

凭借

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(h)X_2 &= \lambda_2(h)X_2,\\
\operatorname{ad}(h)X_3 &= \lambda_3(h)X_3.
\end{aligned}$$

然后，λ_2 和 λ_3 称为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的根，因此根集是 $\Phi=\{\lambda_2,\lambda_3\}$。当然，我们主要对满足以下条件的基本根的子集 $\Pi\subset\Phi$ 感兴趣

i) Π 是 H^* 的线性无关子集；

ii) 对于任何 $\lambda\in\Phi$，我们都有 $\lambda\in\operatorname{span}_{\epsilon,\mathbb{N}}(\Pi)$。

我们可以选择 $\Pi:=\{\lambda_2\}$,，即使 $\Pi:=\{\lambda_3\}$ 也可以。由于 $|\Pi|=1$，因此通过单次 Weyl 变换生成 Weyl 群

$$\begin{aligned}
s_{\lambda_2}\colon H^*_{\mathbb{R}} &\to H^*_{\mathbb{R}}\\
\mu &\mapsto \mu - 2\frac{\kappa^*(\lambda_2,\mu)}{\kappa^*(\lambda_2,\lambda_2)}\lambda_2.
\end{aligned}$$

回想一下，我们可以通过使用 Weyl 变换作用于基本根来恢复整个根集 Φ。事实上，我们有

$$s_{\lambda_2}(\lambda_2)=\lambda_2-2\frac{\kappa^*(\lambda_2,\lambda_2)}{\kappa^*(\lambda_2,\lambda_2)}\lambda_2=\lambda_2-2\lambda_2=-\lambda_2=\lambda_3,$$

不出所料。因为只有一个基本根，所以 Cartan 矩阵实际上只是一个 1×1 的矩阵。它唯一的项是对角线元，因为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是单的，所以我们有

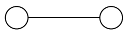
$$C=(2).$$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 Dynkin 图是简单的

因此，参照 Cartan 分类，我们有 $A_1=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.。

16.3 从 Dynkin 图重建 A_2

我们已经看到了一个如何构造李代数的 Dynkin 图的例子，尽管这是这类图中最简单的。现在让我们考虑一下相反的方向。我们将从 Dynkin 图开始



我们立即看到我们有两个基本根，即 $\Pi=\{\pi_1,\pi_2\}$，因为图中有两个圆。键数是 $n_{12}=1$，所以两个基本根的长度相同。此外，根据定义，

$$1=n_{12}=C_{12}C_{21}$$

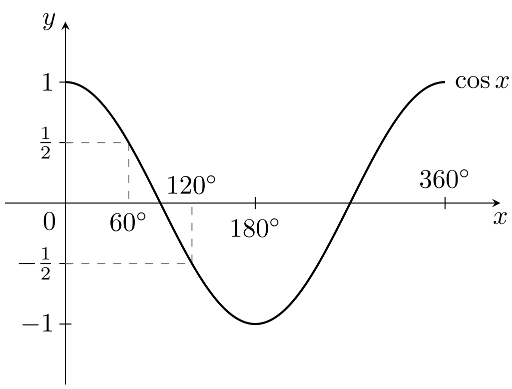
由于 Cartan 矩阵的非对角线项是非正整数，唯一的可能性是 $C_{12}=C_{21}=-1$，所以我们有

$$C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

要确定 π_1 和 π_2 之间的角度 φ ，请回想一下

$$1=n_{12}=4\cos^2\varphi,$$

因此 $|\cos\varphi|=\frac{1}{2}$。有两种解，即 $\varphi=60°$ 和 $\varphi=120°$。



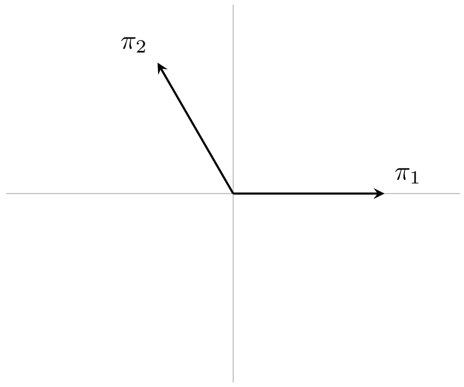
根据定义，我们有

$$\cos\varphi=\frac{\kappa^*(\pi_1,\pi_2)}{|\pi_1|\,|\pi_2|},$$

因此

$$0>C_{12}=2\frac{\kappa^*(\pi_1,\pi_2)}{\kappa^*(\pi_1,\pi_1)}=2\frac{|\pi_1|\,|\pi_2|\cos\varphi}{\kappa^*(\pi_1,\pi_1)}=2\frac{|\pi_2|}{|\pi_1|}\cos\varphi.$$

它遵循 $\cos\varphi<0$，因此 $\varphi=120°$。因此，我们可以将两个基本根绘制在一个平面上，如下所示。.



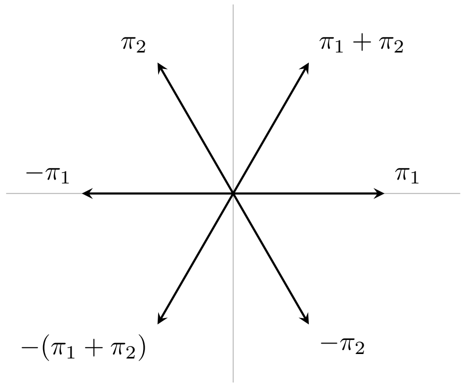
我们可以通过 Weyl 基团的重复作用来确定 Φ 中的所有其他根。例如，我们很容易找到 $s_{\pi_1}(\pi_1) = -\pi_1$ 和 $s_{\pi_2}(\pi_2) = -\pi_2$。我们也有

$$s_{\pi_1}(\pi_2) = \pi_2 - 2\frac{\kappa^*(\pi_1, \pi_2)}{\kappa^*(\pi_1, \pi_1)}\pi_1 = \pi_2 - 2(-\tfrac{1}{2})\pi_1 = \pi_1 + \pi_2.$$

最后，我们有 $s_{\pi_1+\pi_2}(\pi_1 + \pi_2) = -(\pi_1 + \pi_2)$。Weyl 变换的任何进一步动作都会简单地置换这些根。因此，我们有

$$\Phi = \{\pi_1, -\pi_1, \pi_2, -\pi_2, \pi_1 + \pi_2, -(\pi_1 + \pi_2)\}$$

这些都是根。



由于 $H^* = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Pi)$，我们有 $\dim H^* = 2$，因此 Cartan 子代数的维数也是 2。由于 $|\Phi| = 6$，我们知道李代数 A_2 的任何 Cartan-Weyl 基一定有 $2 + 6 = 8$ 个元素。因此，A_2 的维数是 8。

为了完成 A_2 的重建，我们现在想了解一下它的括号是如何工作的。这相当于找到它的结构常数。注意，由于 $\dim A_2 = 8$，所以结构常数 ${C^k}_{ij}$ 由 $8^3 = 512$ 个复数组成 (当然，不是所有的复数都是无关的)。

用 $\{h_1, h_2, e_3, \ldots, e_8\}$ 作为 A_2 的 Cartan-Weyl 基，使得 $H = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{h_1, h_2\})$ 和 e_α 是每个 $h \in H$ 的特征向量。由于 A_2 是简单的，所以 H 是阿贝尔基，因此 H 是阿贝尔基

$$[h_1, h_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad {C^k}_{12} = {C^k}_{21} = 0, \quad \forall\, 1 \leq k \leq 8.$$

对于每个 e_α，对于 $3 \leq \alpha \leq 8$，有一个关联的 $\lambda_\alpha \in \Phi$，使得

$$\forall\, h \in H: \ \mathrm{ad}(h)e_\alpha = \lambda_\alpha(h)e_\alpha.$$

特别地，对于基元素，h_1, h_2，

$$\begin{aligned}[h_1, e_\alpha] &= \mathrm{ad}(h_1)e_\alpha = \lambda_\alpha(h_1)e_\alpha,\\ [h_2, e_\alpha] &= \mathrm{ad}(h_2)e_\alpha = \lambda_\alpha(h_2)e_\alpha,\end{aligned}$$

这样我们就有了

$$\begin{aligned}{C^1}_{1\alpha} = {C^2}_{1\alpha} = 0, \quad {C^\alpha}_{1\alpha} = \lambda_\alpha(h_1), \quad \forall\, 3 \leq \alpha \leq 8,\\ {C^1}_{2\alpha} = {C^2}_{2\alpha} = 0, \quad {C^\alpha}_{2\alpha} = \lambda_\alpha(h_2), \quad \forall\, 3 \leq \alpha \leq 8.\end{aligned}$$

最后，我们需要确定 $[e_\alpha, e_\beta]$。通过使用雅可比恒等式，我们拥有

$$\begin{aligned}[h_i,[e_\alpha,e_\beta]] &= -[e_\alpha,[e_\beta,h_i]] - [e_\beta,[h_i,e_\alpha]]\\ &= -[e_\alpha,-\lambda_\beta(h_i)e_\beta] - [e_\beta,\lambda_\alpha(h_i)e_\alpha]\\ &= \lambda_\beta(h_i)[e_\alpha,e_\beta] + \lambda_\alpha(h_i)[e_\alpha,e_\beta]\\ &= (\lambda_\alpha(h_i)+\lambda_\beta(h_i))[e_\alpha,e_\beta],\end{aligned}$$

那是,

$$\mathrm{ad}(h_i)[e_\alpha,e_\beta] = (\lambda_\alpha(h_i)+\lambda_\beta(h_i))[e_\alpha,e_\beta].$$

如果 $\lambda_\alpha + \lambda_\beta \in \Phi$, 我们有 $[e_\alpha, e_\beta] = \xi e_\gamma$ 对于大约 $3 \le \gamma \le 8$ 和 $\xi \in \mathbb{C}$. 让我们将前面图表中的根标记为

λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
π_1	π_2	$\pi_1+\pi_2$	$-\pi_1$	$-\pi_2$	$-(\pi_1+\pi_2)$

那么比如说

$$\mathrm{ad}(h)[e_3,e_4] = (\pi_1+\pi_2)(h)[e_3,e_4],$$

因此 $[e_3, e_4]$ 是具有特征值 $(\pi_1+\pi_2)(h)$ 的 $\mathrm{ad}(h)$ 的特征向量。但 e_5 也是如此！因此，对于某些 $\xi \in \mathbb{C}$，我们必须有 $[e_3, e_4] = \xi e_5$。类似地，$[e_5, e_7] = \xi e_3$，依此类推。

如果是 $\lambda_\alpha + \lambda_\beta \notin \Phi$，那么为了使上面的方程式成立，我们必须有 we must have either $[e_\alpha, e_\beta] = 0$(所以两边都是零)，或者对所有 h 都有 $\lambda_\alpha(h) + \lambda_\beta(h) = 0$，即 $\lambda_\alpha + \lambda_\beta = 0$ 作为泛函。在后一种情况下，我们必须有 $[e_\alpha, e_\beta] \in H$。这是从单李代数 L 的 Cartan 子代数 H 的极大性的一个更强版本得出的，即

$$\big(\forall\, h \in H : [h,x] = 0\big) \Rightarrow x \in H.$$

总而言之，我们有

$$[e_\alpha,e_\beta] = \begin{cases} \xi e_\gamma & \text{if } \lambda_\alpha+\lambda_\beta \in \Phi\\ \in H & \text{if } \lambda_\alpha+\lambda_\beta = 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

这些关系可用于确定 A_2 的剩余结构常数。

17 李群和李代数的表示理论

李群和李代数在物理学中主要是根据所谓的表示来使用的。很多时候，它们甚至是根据它们的具体表示来定义的。我们采取了更抽象的方法，将李群定义为具有相容群结构的光滑流形，并将其相关的李代数定义为左不变向量场的空间，然后证明了它在恒等式上与切线空间同构。

17.1 李代数的表示

Definition. 设 L 是李代数。L 的一个表示是李代数同态 Let L be a Lie algebra. A *representation* of L is a Lie algebra homomorphism

$$\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V),$$

其中 V 是与 L 相同域上的某个有限维向量空间。

回想一下，线性映射 $\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ 是李代数同态，如果

$$\forall\, x, y \in L:\ \ \rho([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)] := \rho(x)\circ\rho(y) - \rho(y)\circ\rho(x),$$

其中右边的是 $\mathrm{End}(V)$ 上的自然李括号。

Definition. 设 $\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ 是 L 的表示。

i) 向量空间 V 称为 ρ 的表示空间 *(representation space)*。

ii) 表示 ρ 的维度 *(dimension)* 为 $\dim V$。

Example 17.1. 考虑李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$。我们构造了一个满足这些关系的基 $\{X_1, X_2, X_3\}$

$$\begin{aligned}[][X_1, X_2] &= 2X_2,\\ [X_1, X_3] &= -2X_3,\\ [X_2, X_3] &= X_1.\end{aligned}$$

设 $\rho\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ 是下式定义的线性映射

$$\rho(X_1) := \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad \rho(X_2) := \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \rho(X_3) := \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(回想一下，线性映射完全由它在一个基础上的作用决定，由线性连续决定)。为了检查 ρ 是否为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示，我们计算

$$\begin{aligned}[][\rho(X_1), \rho(X_2)] &= \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \rho(2X_2)\\ &= \rho([X_1, X_2]).\end{aligned}$$

同样，我们发现

$$\begin{aligned}[][\rho(X_1), \rho(X_3)] &= \rho([X_1, X_3]),\\ [\rho(X_2), \rho(X_3)] &= \rho([X_2, X_3]).\end{aligned}$$

通过线性延拓，$\rho([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)]$ 对于任意 $x, y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ，因此，ρ 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的具有表示空间 $\mathbb{C}^2$ 的二维表示。请注意，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{im}_\rho(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})) &= \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)\ \middle|\ a + d = 0\right\}\\ &= \{\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \mid \operatorname{tr}\phi = 0\}.\end{aligned}$$

这就是物理课程中对 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的定义，即定义为 2×2 复无迹矩阵的代数。

李代数的两个表示可以在以下意义上联系起来。

Definition. 设 L 是李代数，并设 L 是李代数

$$\rho_1 \colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V_1), \qquad \rho_2 \colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V_2)$$

作为 L 的表示. 线性映射 $f \colon V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ 是*表示的同态 (homomorphism of representations)*，如果

$$\forall x \in L: \ f \circ \rho_1(x) = \rho_2(x) \circ f.$$

等价地，如果下图对所有 $x \in L$ 进行对易。

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1(x)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(x)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \end{tikzcd}$$

另外，如果 $f \colon V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ 是线性同构，则 $f^{-1} \colon V_2 \xrightarrow{\sim} V_1$ 自动是表示的同态，因为

$$\begin{aligned} f \circ \rho_1(x) = \rho_2(x) \circ f \ &\Leftrightarrow \ f^{-1} \circ (f \circ \rho_1(x)) \circ f^{-1} = f^{-1} \circ (\rho_2(x) \circ f) \circ f^{-1} \\ &\Leftrightarrow \ \rho_1(x) \circ f^{-1} = f^{-1} \circ \rho_2(x). \end{aligned}$$

Definition. *李代数表示的同构 (isomorphism of representations)* 是表示的双射同态。

同构表示必须具有相同的维度。

Example 17.2. 考虑旋转群 $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ 的李代数 $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$。它是 $\mathbb{R}$ 上的三维李代数，它有一个满足 $\{J_1, J_2, J_3\}$ 的基。

$$[J_i, J_j] = C^k{}_{ij} J_k,$$

其中，首先通过用 Killing 形式 $\kappa_{ab} = C^m{}_{an} C^n{}_{bm}$“将指标 k 向下拉” 来获得 $C_{kij} := \kappa_{km} C^m{}_{ij}$ 来定义结构常数 $C^k{}_{ij}$，然后设置

$$C_{kij} := \varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{如果 } (i\,j\,k) \text{ 是 } (1\,2\,3) \\ -1 & \text{如果 } (i\,j\,k) \text{ 是 } (1\,2\,3) \text{ 奇置换} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

通过演算这些，我们发现

$$\begin{aligned} [J_1, J_2] &= J_3, \\ [J_2, J_3] &= J_1, \\ [J_3, J_1] &= J_2. \end{aligned}$$

定义线性映射 $\rho_{\mathrm{vec}} \colon \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ by

$$\rho_{\mathrm{vec}}(J_1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\mathrm{vec}}(J_2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\mathrm{vec}}(J_3) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

您可以很容易地检查这是 $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ 的表示。然而，正如你可能从量子力学中知道的那样，$\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ 还有另一种表示，即

$$\rho_{\mathrm{spin}} \colon \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{C}^2),$$

其中 $\mathbb{C}^2$ 被理解为 4 维 $\mathbb{R}$-向量空间，由下式定义

$$\rho_{\mathrm{spin}}(J_1) := -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_1, \qquad \rho_{\mathrm{spin}}(J_2) := -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2, \qquad \rho_{\mathrm{spin}}(J_3) := -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_3,$$

其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是泡利矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

您可以再次检查这是否为 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ 的表示。因为 Since

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{C}^2,$$

ρ_{vec} 矢量和 ρ_{spin} 的表示不是同构的。

任何 (非阿贝尔) 李代数总是至少有两个特殊的表示。

Definition. 设 L 是李代数。L 的平凡表示 *(trivial representation)* 由下式定义

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{trv}} \colon L &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V) \\ x &\mapsto \rho_{\mathrm{trv}}(x) := 0, \end{aligned}$$

其中 0 表示 V 上的平凡自同态。

Definition. L 的伴随表示 *(adjoint representation)* 是

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{adj}} \colon L &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(L) \\ x &\mapsto \rho_{\mathrm{adj}}(x) := \mathrm{ad}(x). \end{aligned}$$

这些确实是表示，因为我们已经证明 ad 是李代数同态，而对于平凡的表示，我们有

$$\forall\, x, y \in L: \ \rho_{\mathrm{trv}}([x,y]) = 0 = [\rho_{\mathrm{trv}}(x), \rho_{\mathrm{trv}}(y)].$$

Definition. 表示 $\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ 称为忠实的，如果 ρ 是单射的，即

$$\dim(\mathrm{im}_\rho(L)) = \dim L.$$

Example 17.3. 到目前为止所考虑的所有表示都是忠实的，除了当李代数 L 本身不平凡时的平凡表示。例如，考虑伴随表示。我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(y) &\Leftrightarrow \forall\, z \in L : \mathrm{ad}(x)z = \mathrm{ad}(y)z \\ &\Leftrightarrow \forall\, z \in L : [x,z] = [y,z] \\ &\Leftrightarrow \forall\, z \in L : [x-y,z] = 0. \end{aligned}$$

如果 L 是平凡的，那么任何表示都是忠实的。否则，会有一些非零 $z \in L$，因此我们必须有 $x - y = 0$，所以 $x = y$，因此 ad 是内射的。

Definition. 给定两个表示 $\rho_1 \colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V_1)$ 和 $\rho_2 \colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V_2)$，我们可以构造新的表示，称为

i) 直和表示 *(direct sum representation)*

$$\begin{aligned} \rho_1 \oplus \rho_2 \colon L &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V_1 \oplus V_2) \\ x &\mapsto (\rho_1 \oplus \rho_2)(x) := \rho_1(x) \oplus \rho_2(x) \end{aligned}$$

ii) 张量积表示 *(tensor product representation)*

$$\begin{aligned} \rho_1 \otimes \rho_2 \colon L &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V_1 \times V_2) \\ x &\mapsto (\rho_1 \otimes \rho_2)(x) := \rho_1(x) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \rho_2(x). \end{aligned}$$

Example 17.4. 以块状矩阵形式给出的直和表示 $\rho_{\mathrm{vec}} \oplus \rho_{\mathrm{spin}} \colon \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{C}^2)$ 由下式给出

$$(\rho_{\mathrm{vec}} \oplus \rho_{\mathrm{spin}})(x) = \left(\begin{array}{c|c} \rho_{\mathrm{vec}}(x) & 0 \\ \hline 0 & \rho_{\mathrm{spin}}(x) \end{array}\right)$$

是 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ 的 7 维表示。

Definition. 一个表示 $\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ 称为可约的 *(reducible)*，如果存在一个非平凡向量子空间 $U \subseteq V$, 它在 ρ 的作用下是不变的，即

$$\forall\, x \in L : \forall\, u \in U : \ \rho(x)u \in U.$$

换句话说，ρ 仅限于表示 $\rho|_U : L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U)$。

Definition. 如果一个表示是不可约的 *(irreducible)*，则它是可约的。

Example 17.5. i) 表示 $\rho_{\mathrm{vec}} \oplus \rho_{\mathrm{spin}} : \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{C}^2)$ 是可约表示，因为例如我们具有子空间 $\mathbb{R}^3 \oplus 0$，使得

$$\forall\, x \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) : \forall\, u \in \mathbb{R}^3 \oplus 0 : \ (\rho_{\mathrm{vec}} \oplus \rho_{\mathrm{spin}})(x)u \in \mathbb{R}^3 \oplus 0.$$

ii) ρ_{vec} 和 ρ_{spin} 的表示都是不可约的。

Remark 17.6. 正如单李代数是所有半单李代数的积木 (the building blocks) 一样，半单李代数的不可约表示也是李代数所有有限维表示的积木 (the building blocks)。任何这样的表示都可以分解为不可约表示的直和，然后可以根据它们所谓的最高权重 *(highest weights)* 对其进行分类。

17.2 Casimir 算符

紧李代数 (即紧李群的李代数) 的每个表示 ρ 都有一个与之相关的算子 Ω_ρ，称为 Casimir 算子。我们需要一些准备来定义它。

Definition. 设 $\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ 是复李代数 L 的表示，定义 L 上的*ρ-Killing form* 为

$$\begin{aligned} \kappa_\rho \colon L \times L &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto \kappa_\rho(x,y) := \mathrm{tr}(\rho(x) \circ \rho(y)). \end{aligned}$$

当然，我们到目前为止考虑的 Killing 形式只是 κ_{ad}。类似于 κ_{ad}，每个 κ_ρ 关于 L 的 Lie 括号是对称的和结合的。

Proposition 17.7. 设 $\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ 是复半单李代数 L 的忠实表示，则 κ_ρ 是非退化的。

因此, κ_ρ 诱导同构 $L \xrightarrow{\sim} L^*$ 通过

$$L \ni x \mapsto \kappa_\rho(x,-) \in L^*.$$

回想一下，如果 $\{X_1,\ldots,X_{\dim L}\}$ 是 L 的基，则对偶基 $\{\widetilde{X}^1,\ldots,\widetilde{X}^{\dim L}\}$ 由下式定义

$$\widetilde{X}^i(X_j) = \delta^i_j.$$

利用 κ_ρ 诱导的同构，我们可以找到一些 $\xi_1,\ldots,\xi_{\dim L} \in L$ 使得我们有 $\kappa(\xi_i,-) = \widetilde{X}^i$ ，等价地，

$$\forall\, x \in L : \ \kappa_\rho(x,\xi_i) = \widetilde{X}^i(x).$$

这样我们就有了

$$\kappa_\rho(X_i,\xi_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } i \neq j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proposition 17.8. 设 $\{X_i\}$ 和 $\{\xi_j\}$ 定义如上。然后

$$[X_j,\xi_k] = \sum_{m=1}^{\dim L} C^k{}_{mj}\xi_m,$$

其中 $C^k{}_{mj}$ 是相对 $\{X_i\}$ 的结构常数。

Proof. 通过使用 κ_ρ 的关联性，我们可以

$$\kappa_\rho(X_i,[X_j,\xi_k])=\kappa_\rho([X_i,X_j],\xi_k)=C^m{}_{ij}\kappa_\rho(X_m,\xi_k)=C^m{}_{ij}\delta_{mk}=C^k{}_{ij}.$$

但我们也有

$$\kappa_\rho\Big(X_i,\sum_{m=1}^{\dim L}C^k{}_{mj}\xi_m\Big)=\sum_{m=1}^{\dim L}C^k{}_{mj}\kappa_\rho(X_i,\xi_m)=\sum_{m=1}^{\dim L}C^k{}_{mj}\delta_{im}=C^k{}_{ij}.$$

因此

$$\forall\, 1\le i\le \dim L:\ \kappa_\rho\Big(X_i,[X_j,\xi_k]-\sum_{m=1}^{\dim L}C^k{}_{mj}\xi_m\Big)=0$$

因此，这一结果是由 κ_ρ 的非简并性 (non-degeneracy) 得出的。 □

现在我们准备定义 Casimir 算子并证明随后的定理。

Definition. 设 $\rho\colon L\xrightarrow{\sim}\mathrm{End}(V)$ 是复 (紧) 李代数 L 的忠实表示，$\{X_1,\dots,X_{\dim L}\}$ 是 L 的基。与表示 ρ 相关的 *Casimir 算子 (Casimir operator)* 是自同态 $\Omega_\rho\colon V\xrightarrow{\sim}V$。

$$\Omega_\rho:=\sum_{i=1}^{\dim L}\rho(X_i)\circ\rho(\xi_i).$$

Theorem 17.9. 设 Ω_ρ 是表示 $\rho\colon L\xrightarrow{\sim}\mathrm{End}(V)$ 的 *Casimir* 算子。然后

$$\forall\, x\in L:\ [\Omega_\rho,\rho(x)]=0,$$

也就是说，Ω_ρ 与 $\mathrm{im}_\rho(L)$. 中的每个自同态可交换。

Proof. 请注意，上面的括号是 $\mathrm{End}(V)$ 上的括号。设 $x=x^kX_k\in L$，则

$$\begin{aligned}[\Omega_\rho,\rho(x)]&=\Big[\sum_{i=1}^{\dim L}\rho(X_i)\circ\rho(\xi_i),\rho(x^kX_k)\Big]\\&=\sum_{i,k=1}^{\dim L}x^k[\rho(X_i)\circ\rho(\xi_i),\rho(X_k)].\end{aligned}$$

观察到，如果李括号作为关于结合积的对易算符，就像 $\mathrm{End}(V)$ 的情况一样，我们有

$$\begin{aligned}[AB,C]&=ABC-CBA\\&=ABC-CBA-ACB+ACB\\&=A[B,C]+[A,C]B.\end{aligned}$$

因此，通过应用这一点，我们可以获得

$$\begin{aligned}\sum_{i,k=1}^{\dim L}x^k[\rho(X_i)\circ\rho(\xi_i),\rho(X_k)]&=\sum_{i,k=1}^{\dim L}x^k\big(\rho(X_i)\circ[\rho(\xi_i),\rho(X_k)]+[\rho(X_i),\rho(X_k)]\circ\rho(\xi_i)\big)\\&=\sum_{i,k=1}^{\dim L}x^k\big(\rho(X_i)\circ\rho([\xi_i,X_k])+\rho([X_i,X_k])\circ\rho(\xi_i)\big)\\&=\sum_{i,k,m=1}^{\dim L}x^k\big(\rho(X_i)\circ\rho(-C^i{}_{mk}\xi_m)+\rho(C^m{}_{ik}X_m)\circ\rho(\xi_i)\big)\\&=\sum_{i,k,m=1}^{\dim L}x^k\big(-C^i{}_{mk}\rho(X_i)\circ\rho(\xi_m)+C^m{}_{ik}\rho(X_m)\circ\rho(\xi_i)\big)\\&=\sum_{i,k,m=1}^{\dim L}x^k\big(-C^i{}_{mk}\rho(X_i)\circ\rho(\xi_m)+C^i{}_{mk}\rho(X_i)\circ\rho(\xi_m)\big)\\&=0,\end{aligned}$$

其中我们在第二项中交换了伪求和指标 i 和 m。 □

Lemma 17.10 (Schur)**.** *如果 $\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ 是不可约的，则与 $\mathrm{im}_\rho(L)$ 中的每个自同态可交换的任何算子 S 都具有如下形式*

$$S = c_\rho \,\mathrm{id}_V$$

对于某个常数 $c_\rho \in \mathbb{C}$ (或 $\mathbb{R}$, 如果 L 是实李代数).

紧接着，对于一些 c_ρ ，$\Omega_\rho = c_\rho \,\mathrm{id}_V$ ，但是，实际上，我们可以说得更多。

Proposition 17.11. *$\rho\colon L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ 的 Casimir 算子为 $\Omega_\rho = c_\rho \,\mathrm{id}_V$，其中*

$$c_\rho = \frac{\dim L}{\dim V}.$$

Proof. 我们有

$$\mathrm{tr}(\Omega_\rho) = \mathrm{tr}(c_\rho \,\mathrm{id}_V) = c_\rho \dim V$$

和

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\Omega_\rho) &= \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{\dim L} \rho(X_i)\circ\rho(\xi_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\dim L} \mathrm{tr}(\rho(X_i)\circ\rho(\xi_i))\\
&= \sum_{i=1}^{\dim L} \kappa_\rho(X_i,\xi_i)\\
&= \sum_{i=1}^{\dim L} \delta_{ii}\\
&= \dim L,
\end{aligned}$$

这正是我们想要的。 □

Example 17.12. 考虑基数 $\{J_1, J_2, J_3\}$ 满足的李代数 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k,$$

其中我们假设较低的指标 k 上的求和约定。回想一下，表示 $\rho_{\mathrm{vec}}\colon \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ 由下式定义

$$\rho_{\mathrm{vec}}(J_1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \rho_{\mathrm{vec}}(J_2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \rho_{\mathrm{vec}}(J_3) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

让我们首先评估一下 $\kappa_{\rho_{\mathrm{vec}}}$ 的分量。我们有

$$\begin{aligned}
(\kappa_{\rho_{\mathrm{vec}}})_{11} := \kappa_{\rho_{\mathrm{vec}}}(J_1,J_1) &= \mathrm{tr}(\rho_{\mathrm{vec}}(J_1)\circ\rho_{\mathrm{vec}}(J_1))\\
&= \mathrm{tr}((\rho_{\mathrm{vec}}(J_1))^2)\\
&= \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^2\\
&= \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= -2.
\end{aligned}$$

在对其他成分进行类似计算后，我们发现

$$[(\kappa_{\rho_{\mathrm{vec}}})_{ij}] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

因此，$\kappa_{\rho_{\text{vec}}}(J_i,\xi_j)=\delta_{ij}$ 要求我们定义 $\xi_i := -\frac{1}{2}J_i$.。那么我们有

$$\begin{aligned}
\Omega_{\rho_{\text{vec}}} &:= \sum_{i=1}^{3}\rho_{\text{vec}}(J_i)\circ\rho_{\text{vec}}(\xi_i)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\rho_{\text{vec}}(J_i)\circ\rho_{\text{vec}}(-\tfrac{1}{2}J_i)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\rho_{\text{vec}}(J_i))^2\\
&= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此 $\Omega_{\rho_{\text{vec}}}=c_{\rho_{\text{vec}}}\,\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ 其中 $c_{\rho_{\text{vec}}}=1$, 这与我们之前的定理一致，因为

$$\frac{\dim\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})}{\dim\mathbb{R}^3}=\frac{3}{3}=1.$$

Example 17.13. 让我们再次考虑李代数 $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$，但这一次用表示 ρ_{spin} 旋转。回想一下，这是由

$$\rho_{\text{spin}}(J_1) := -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_1,\qquad \rho_{\text{spin}}(J_2) := -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2,\qquad \rho_{\text{spin}}(J_3) := -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_3,$$

其中 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 是泡利矩阵。回想一下 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\text{id}_{\mathbb{C}^2}$，我们计算

$$\begin{aligned}
(\kappa_{\rho_{\text{spin}}})_{11} := \kappa_{\rho_{\text{spin}}}(J_1,J_1) &= \text{tr}(\rho_{\text{spin}}(J_1)\circ\rho_{\text{spin}}(J_1))\\
&= \text{tr}((\rho_{\text{spin}}(J_1))^2)\\
&= (-\tfrac{\mathrm{i}}{2})^2\,\text{tr}(\sigma_1^2)\\
&= -\tfrac{1}{4}\,\text{tr}(\text{id}_{\mathbb{C}^2})\\
&= -1.
\end{aligned}$$

注意，$\text{tr}(\text{id}_{\mathbb{C}^2})=4$, 因为 $\text{tr}(\text{id}_V)=\dim V$ ，并且这里 $\mathbb{C}^2$ 被认为是 $\mathbb{R}$ 上的 4 维向量空间。继续类似地，我们发现 $\kappa_{\rho_{\text{spin}}}$ 自旋的分量是

$$[(\kappa_{\rho_{\text{spin}}})_{ij}] = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

因此，我们定义 $\xi_i := -J_i$。那么我们有

$$\begin{aligned}\Omega_{\rho_{\text{spin}}} &:= \sum_{i=1}^{3} \rho_{\text{spin}}(J_i) \circ \rho_{\text{spin}}(\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \rho_{\text{spin}}(J_i) \circ \rho_{\text{spin}}(-J_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{3} (\rho_{\text{spin}}(J_i))^2 \\ &= -\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{3} \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2} \\ &= \frac{3}{4} \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2},\end{aligned}$$

根据……的事实

$$\frac{\dim \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})}{\dim \mathbb{C}^2} = \frac{3}{4}.$$

17.3 李群的表示

我们现在转到李群的表示。给定一个向量空间 V，回想一下 $\mathrm{End}(V)$ 的子集由可逆自同态组成，表示为

$$\mathrm{GL}(V) \equiv \mathrm{Aut}(V) := \{\phi \in \mathrm{End}(V) \mid \det \phi \neq 0\},$$

在合成下形成一个群，称为 V 的自同构群 (或一般线性群)。此外，如果 V 是有限维 K-向量空间，则 $V \cong_{\text{vec}} K^{\dim V}$，因此群 $\mathrm{GL}(V)$ 可以被赋予李群的结构通过

$$\mathrm{GL}(V) \cong_{\text{Lie grp}} \mathrm{GL}(K^{\dim V}) := \mathrm{GL}(\dim V, K).$$

当然，如果我们已经在 K^d 上建立了拓扑和可微结构，就像 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{C}^d$ 的情况一样

Definition. 李群 (G，•) 的一个*表示 (representation)* 是李群同态

$$R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

对于某些有限维向量空间 V。

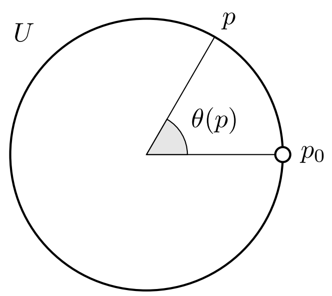
回想一下，$R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ 是李群同态，如果它是光滑的且

$$\forall\, g_1, g_2 \in G : R(g_1 \bullet g_2) = R(g_1) \circ R(g_2).$$

请注意，与任何群同态一样，我们有

$$R(e) = \mathrm{id}_V \qquad \text{and} \qquad R(g^{-1}) = R(g)^{-1}.$$

Example 17.14. 考虑李群 $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$。作为光滑流形，$\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ 与圆 S^1 同构。设 $U = S^1 \setminus \{p_0\}$，其中 p 是 S^1 的任意点，这样我们就可以通过将 U 中的每个点映射到 $[0, 2\pi)$ 中的一个“角度”来定义一个坐标卡 $\theta\colon U \to [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ on S^1。



算符

$$p_1 \bullet p_2 := (\theta(p_1) + \theta(p_2)) \mod 2\pi$$

赋予 $S^1 \cong_{\text{diff}} \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ 李群的结构。然后，$\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ 的表示由下式给出

$$\begin{aligned} R \colon \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) \\ p &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta(p) & \sin\theta(p) \\ -\sin\theta(p) & \cos\theta(p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

实际上，正弦和余弦的加法公式意味着

$$R(p_1 \bullet p_2) = R(p_1) \circ R(p_2).$$

Example 17.15. 设 G 是一个李群 (在本例中我们去掉了 $\bullet$)。对于每个 $g \in G$，定义伴随映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g \colon G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

注意大写的“A”，以区别于李代数上的伴随映射。由于 Ad_g 是李群乘法和逆映射的组合，所以它是光滑映射。而且，我们有

$$\mathrm{Ad}_g(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e.$$

因此，Ad_g 恒等映射的前推就是映射

$$(\mathrm{Ad}_{g*})_e \colon T_eG \xrightarrow{\sim} T_{\mathrm{Ad}_g(e)}G = T_eG.$$

因此，我们有 $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{End}(T_eG)$。事实上，你可以检查一下

$$(\mathrm{Ad}_{g^{-1}*})_e \circ (\mathrm{Ad}_{g*})_e = (\mathrm{Ad}_{g*})_e \circ (\mathrm{Ad}_{g^{-1}*})_e = \mathrm{id}_{T_eG},$$

因此，特别地，我们有 $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{GL}(T_eG) \cong_{\text{Lie grp}} \mathrm{GL}(\mathcal{L}(G))$.
因此我们可以绘制一张地图

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} \colon G &\to \mathrm{GL}(T_eG) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_{g*} \end{aligned}$$

你们可以看到，这是 G 在其李代数上的表示。

Remark 17.16. 由于李群 G 的表示 R 被要求是光滑的，我们总是可以考虑它在恒等映射上的微分或前推

$$(R_*)_e \colon T_eG \xrightarrow{\sim} T_{\mathrm{id}_V}\mathrm{GL}(V).$$

因为对于任何 $A, B \in T_eG$，我们都有

$$(R_*)_e[A,B] = [(R_*)_eA, (R_*)_eB],$$

映射 $(R_*)_e$ 是向量空间 $\mathrm{GL}(V)$ 上 G 的李代数的表示。事实上，在前面的示例中，我们有

$$(\mathrm{Ad}_*)_e = \mathrm{ad},$$

其中 ad 是 T_eG 的伴随表示。

18 从李代数重建李群

我们已经详细了解了如何从给定的李群构造李代数。现在我们要考虑反问题，即，给定一个李代数，我们是否可以构造一个李群，它的关联李代数就是给定的李代数，如果是这样，那么这个对应是否是双射的。

18.1 积分曲线

Definition. 设 M 是光滑流形, 设 $Y \in \Gamma(TM)$。Y 的积分曲线是光滑曲线 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, with $\varepsilon > 0$，其中 $\varepsilon > 0$，使得

$$\forall\, \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon):\ X_{\gamma,\gamma(\lambda)} = Y|_{\gamma(\lambda)}.$$

从常微分方程解的局部存在唯一性出发，证明了给定任意 $Y \in \Gamma(TM)$ 和任意 $p \in M$，存在 $\varepsilon > 0$，且存在一条光滑曲线 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$，且 $\gamma(0) = p$ 是 Y 的一条积分曲线.

此外，积分曲线是局部唯一的。这里我们的意思是，如果 γ_1 和 γ_2 都是 γ 到 p 的积分曲线，即 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$，则 $\gamma_1 = \gamma_2$ 在它们的定义域的交集上。如下所示，我们可以获得真正的独特性。

Definition. $Y \in \Gamma(TM)p \in M$ 的最大积分曲线 *(maximal integral curve)* 是 Y 到 p 的唯一积分曲线 $\gamma\colon I^p_{\max} \to M$ ，其中

$$I^p_{\max} := \bigcup\{I \subseteq \mathbb{R} \mid \text{there exists an integral curve } \gamma\colon I \to M \text{ of } Y \text{ through } p\}.$$

对于给定的矢量场，一般来说，$I^p_{\max}$ 会因点而异。

Definition. 如果对所有 $p \in M$，$I^p_{\max} = \mathbb{R}$ ，则向量场是完备的 *(complete)*。

我们有以下结果。

Theorem 18.1. *在紧流形上，每个向量场都是完备的。*

在李群上，即使不是紧的，也总有完备的向量场。

Theorem 18.2. *李群上的每个左不变向量场都是完备的。*

左不变向量场的最大积分曲线是构造从李代数到李群的映射的关键。

18.2 指数映射

设 G 是李群。回想一下，给定任何 $A \in T_eG$,，我们可以通过同构 $j\colon T_eG \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(G)$ 将唯一确定的左不变向量域 $X^A := j(A)$ 定义为

$$X^A|_g := (\ell_g)_*(A).$$

设 $\gamma^A\colon \mathbb{R} \to G$ 是 X^A 通过 $e \in G$ 的最大积分曲线。

Definition. 设 G 是李群。指数映射 *(exponential map)* 定义为

$$\begin{aligned}\exp\colon T_eG &\to G\\ A &\mapsto \exp(A) := \gamma^A(1)\end{aligned}$$

Theorem 18.3. *i) 映射 $\exp$ 是光滑的，并且在 $0 \in T_eG$ 附近存在局部微分同胚，即存在包含 0 的开 $V \subseteq T_eG$，使得限制*

$$\exp|_V\colon V \to \exp(V) \subseteq G$$

是双射的，并且 $\exp|_V$ 和 $(\exp|_V)^{-1}$ 都是光滑的。

ii) 如果 G 是紧的，则 $\exp$ 是满射的。

注意，X^0 的最大积分曲线是常数曲线 $\gamma^0(\lambda) \equiv e$，因此我们有 $\exp(0) = e$。然后定理的第一部分说，我们可以从 T_eG 的恒等式的邻域恢复 G 的恒等式的邻域。

因为 T_eG 是一个向量空间，所以它是非紧的 (直观地说，它在每个方向上都无限远地延伸)，因此，如果 G 是紧的，则 exp 不能是单射的。这是因为，根据定理的第二部分，它将是微分同胚 $T_eG \to G$。但是，由于 G 是紧的，而 T_eg 不是，它们不是微分同胚的。

Proposition 18.4. 设 G 是李群。$\exp\colon T_eG \to G$ 的图像是 G 的连通分支，其中包含单位元。

因此，如果 G 本身是连通的，则 exp 又是满射的。请注意，一般而言，连通拓扑空间和紧拓扑空间之间没有关系，即拓扑空间可以是其中之一，也可以同时是两者，或者两者都不是。

Example 18.5. 设 $B\colon V \times V$ 是 V 上的伪内积。然后

$$\mathrm{O}(V) := \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \forall\, v, w \in V : B(\phi(v), \phi(w)) = B(v, w)\}$$

称为 V 相对于 B 的正交群 *(orthogonal group)* 正交群。当然，如果需要强调 B 或 V 的基所在的域，可以将它们包括在记号中。每个 $\phi \in \mathrm{O}(V)$ 都有行列式 1 或 -1，因为 det 是乘性的，所以我们有一个子群

$$\mathrm{SO}(V) := \{\phi \in \mathrm{O}(V) \mid \det\phi = 1\}.$$

这些实际上是 $\mathrm{GL}(V)$ 的 Lie 子群。李群 $\mathrm{SO}(V)$ 是连通的

$$\mathrm{O}(V) = \mathrm{SO}(V) \cup \{\phi \in \mathrm{O}(V) \mid \det\phi = -1\}$$

是不连通的。由于 $\mathrm{SO}(V)$ 包含 id_V，我们有

$$\mathfrak{so}(V) := T_{\mathrm{id}_V}\mathrm{SO}(V) = T_{\mathrm{id}_V}\mathrm{O}(V) =: \mathfrak{o}(V)$$

和

$$\exp(\mathfrak{so}(V)) = \exp(\mathfrak{o}(V)) = \mathrm{SO}(V).$$

Example 18.6. 选择 T_eG 的基 $A_1, \dots, A_{\dim G}$ 为 G 在 e 附近提供了一个方便的坐标。例如，考虑 Lorentz 群

$$\mathrm{O}(3,1) \equiv \mathrm{O}(\mathbb{R}^4) = \{\Lambda \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4) \mid \forall\, x, y \in \mathbb{R}^4 : B(\Lambda(x), \Lambda(y)) = B(x, y)\},$$

其中 $B(x, y) := \eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$, 其中 $0 \le \mu, \nu \le 3$ 和

$$[\eta^{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}] := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lorentz 群 $\mathrm{O}(3,1)$ 是 6 维的，因此 Lorentz 代数 $\mathfrak{o}(3,1)$ 也是 6 维的。为方便起见，不将 $\mathfrak{o}(3,1)$ 的基表示为 $\{M^i \mid i = 1, \dots, 6\}$，我们将其表示为 $\{M^{\mu\nu} \mid 0 \le \mu, \nu \le 3\}$，并要求指标 μ, ν 是反对称的，即

$$M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}.$$

则 $M^{\mu\nu} = 0$(当为 $\rho = \sigma$ 时)，而集合 $\{M^{\mu\nu} \mid 0 \le \mu, \nu \le 3\}$ 虽然在技术上不是线性独立的，但包含我们要考虑作为基础的 6 个独立元素。这些基本元素满足以下括号关系

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}.$$

任何元素 $\lambda \in \mathfrak{o}(3,1)$ 都可以表示为 $M^{\mu\nu}$ 的线性组合，

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$$

其中，系数 $\omega_{\mu\nu}$ 上的索引也是反对称的，系数 $\frac{1}{2}$ 确保所有 μ, ν 的总和只对每个反对称对计数一次。那么我们有

$$\Lambda = \exp(\lambda) = \exp(\tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) \in \mathrm{O}(3,1).$$

$\mathrm{O}(3,1)$ 的子群由保持空间取向的 Lorentz 变换或真 *(proper)*Lorentz 变换组成，记为 SO(3 1)。由时间取向保持或正交 *orthochronous*Lorentz 变换组成的子群由 $\mathrm{O}^+(3,1)$ 表示。李群 $\mathrm{O}(3,1)$ 是不连通的：它的四个连通分支是

i) $\mathrm{SO}^+(3,1) := \mathrm{SO}(3,1) \cap \mathrm{O}^+(3,1)$, 也称为受限洛伦兹群 *(restricted Lorentz group)*，由真的正交 Lorentz 变换组成；

ii) $\mathrm{SO}(3,1) \setminus \mathrm{O}^+(3,1)$, 真的非正交变换；

iii) $\mathrm{O}^+(3,1) \setminus \mathrm{SO}(3,1)$, 不真的正交变换；

iv) $\mathrm{O}(3,1) \setminus (\mathrm{SO}(3,1) \cup \mathrm{O}^+(3,1))$, 不真的非正交变换；.

由于 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} \in \mathrm{SO}^+(3,1)$，所以我们有 $\exp(\mathfrak{o}(3,1)) = \mathrm{SO}^+(3,1)$. 然后，$\{M^{\mu\nu}\}$ 提供了 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 的良好的坐标，因为如果我们选择

$$[\omega_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ -\psi_1 & 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\psi_2 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ -\psi_3 & \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

则洛伦兹变换 $\exp(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) \in \mathrm{SO}^+(3,1)$ 对应于 (ψ_1, ψ_2, ψ_3) 方向的升压 (boost) 和 $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 的空间旋转。事实上，在物理学中，人们经常认为李群 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 是由 $\{M^{\mu\nu}\}$ 生成的。

一个表示 $\rho\colon T_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}}\mathrm{SO}^+(3,1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ 由以下给出:

$$\rho(M^{\mu\nu})^a{}_b := \eta^{\nu a}\delta^\mu_b - \eta^{\mu a}\delta^\nu_b$$

这可能就是您在之前的一些相对论课程中看到的 $M^{\mu\nu}$ 本身的定义。使用该表示法，我们得到了相应的表示法

$$R\colon \mathrm{SO}^+(3,1) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$$

根据定义, 通过指数映射

$$R(\Lambda) = \exp(\tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\rho(M^{\mu\nu})).$$

然后，映射 exp 变成矩阵的通常指数 (级数)。

Definition. 李群 G 的单参数子群 *(one-parameter subgroup)* 是李群同态

$$\xi\colon \mathbb{R} \to G,$$

其中 $\mathbb{R}$ 被理解为普通加法下的李群。

Example 18.7. 设 M 是光滑流形 $Y \in \Gamma(TM)$ 是完备向量场。Y 的流动 *(flow)* 是光滑映射

$$\begin{aligned} \Theta\colon \mathbb{R} \times M &\to M \\ (\lambda, p) &\mapsto \Theta_\lambda(p) := \gamma_p(\lambda), \end{aligned}$$

其中 λ_p 是 M 到 p 的最大积分曲线。对于固定的 p，我们有

$$\Theta_0 = \mathrm{id}_M, \qquad \Theta_{\lambda_1} \circ \Theta_{\lambda_2} = \Theta_{\lambda_1+\lambda_2}, \qquad \Theta_{-\lambda} = \Theta_\lambda^{-1}.$$

对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，映射 Θ_λ 是微分同胚 $M \to M$。用 $\mathrm{Diff}(M)$ 表示微分同胚 $M \to M$ 的群 (在合成下)，我们有这样的映射

$$\begin{aligned} \xi\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{Diff}(M) \\ \lambda &\mapsto \Theta_\lambda \end{aligned}$$

是 $\mathrm{Diff}(M)$ 的一个单参数子群。

Theorem 18.8. *设 G 是李群。*

i) 设 $A \in T_eG$. 映射

$$\begin{aligned} \xi^A\colon \mathbb{R} &\to G \\ \lambda &\mapsto \xi^A(\lambda) := \exp(\lambda A) \end{aligned}$$

是一个单参数子群。

ii) G 的每个单参数子群都有形式 ξ^A 表示某个 $A \in T_eG$。

因此，李代数允许我们研究李群的所有单参数子群。

Theorem 18.9. 设 G 和 H 是李群，$\phi\colon G \to H$ 是李群同态。那么，对于所有的 $A \in T_{e_G}G$，我们都有

$$\phi(\exp(A)) = \exp((\phi_*)_{e_G}A).$$

等同地，下图显示了对易关系。

$$\begin{tikzcd}
T_{e_G}G \arrow[r, "(\phi_*)_{e_G}"] \arrow[d, "\exp"'] & T_{e_H}H \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, "\phi"] & H
\end{tikzcd}$$

特别是，对于 $\phi \equiv \mathrm{Ad}_g\colon G \to G$, 我们有

$$\mathrm{Ad}_g(\exp(A)) = \exp((\mathrm{Ad}_{g*})_eA).$$

19 主纤维丛

19.1 流形上的李群作用

19.2 主纤维丛

19.3 主丛态射

20 纤维丛上的联络

20.1 纤维丛上的联络

20.2 丛联络的态射

21 连通和连通 1-形式

21.1 主丛上的连通

21.2 连通 1-形式

22 基流形上联络的局部表示：Yang Mills 场

22.1 Yang-Mills 场与局部表示

22.2 Maurer-Cartan 形式

22.3 规范映射

23 平行移动

23.1 水平提升到主束

23.2 用路径有序指数解水平升力常微分方程

23.3 水平提升到丛联络

24 主丛上的曲率和挠率

24.1 协变外导数与曲率

24.2 挠率

25 协变导数

25.1 局部截面与等变函数的等价性

25.2 关联矢量纤维丛上的线性作用

25.3 协变导数的构造