

Boundary Conformal Field Theory

从二维 CFT 到边界态、Cardy 条件与 anomaly

Lecture Note

2026 年 6 月 27 日

摘要

这份笔记假设读者已经熟悉二维共形场论的基本内容：primary fields、OPE、Virasoro algebra、characters、modular transformation 与 Verlinde formula。我们的目标是解释 Boundary CFT 的核心逻辑：边界如何把左右运动自由度粘合起来，为什么边界态满足

$$(L_n - \bar{L}_{-n})|B\rangle = 0,$$

什么是 Ishibashi state，什么是 Cardy state，为什么 annulus 的 open/closed channel 一致性给出 Cardy condition。最后我们补充 Oshikawa 等人的观点：对称 Cardy boundary state 的存在可以作为判断 1+1d CFT 是否有't Hooft anomaly 的工具。

目录

1 从普通 CFT 到 Boundary CFT	3
2 为什么边界条件是 $T = \bar{T}$	4
3 Doubling Trick: 为什么 BCFT 只有一份手征代数	4
4 Bulk Primary、Boundary Primary 与 Boundary Changing Operator	5
5 Annulus: Open Channel 与 Closed Channel	5
5.1 Open-string channel	6
5.2 Closed-string channel	6
6 Ishibashi State	6
7 Cardy Condition	8
8 Cardy 解与 Verlinde Formula	8
9 例子: Ising CFT 的三个边界条件	9
10 自由 Compact Boson: Dirichlet 与 Neumann	10
11 边界态与 Gapping Potential	11

12 Boundary CFT 与 Anomaly: Oshikawa 的观点	11
12.1 $SU(N)_k$ WZW model 的例子	12
12.2 T-duality 的意义	13
13 总结: 学习 Boundary CFT 的主线	13

1 从普通 CFT 到 Boundary CFT

普通二维 CFT 通常定义在整个复平面上。我们写

$$z = x + i\tau, \quad \bar{z} = x - i\tau.$$

能动张量分成左右两份：

$$T(z), \quad \bar{T}(\bar{z}).$$

它们各自产生一份 Virasoro algebra：

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \quad [L_m, \bar{L}_n] = 0. \end{aligned}$$

因此 bulk CFT 的 Hilbert space 通常写成

$$\mathcal{H}_{\text{bulk}} = \bigoplus_{i,j} M_{ij} \mathcal{V}_i \otimes \bar{\mathcal{V}}_j.$$

这里 \mathcal{V}_i 和 $\bar{\mathcal{V}}_j$ 是左右两份手征代数的表示。

Boundary CFT 的核心变化是：边界把 left movers 和 right movers 粘起来。一个左运动模碰到边界后会反射成右运动模。因此左右两份 Virasoro 不再独立。

考虑上半平面

$$\text{Im } z \geq 0,$$

边界是实轴

$$z = \bar{z} = x.$$

边界要求能流不能穿过边界。物理上，这意味着

$$T^{x\tau}(x, 0) = 0.$$

在复坐标中，它等价于

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}), \quad z = \bar{z}.$$

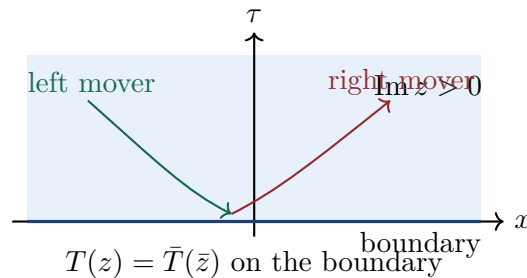


图 1: 上半平面上的 BCFT。边界把左运动自由度反射成右运动自由度。

边界条件

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z})$$

保留的是对角的共形变换，而不是两份独立的共形变换。因此 BCFT 中只剩下一份有效的 Virasoro symmetry。

2 为什么边界条件是 $T = \bar{T}$

在没有边界的平面上，任意解析变换都可以作为局域共形变换。若有边界，例如上半平面，允许的变化必须把边界映到边界。设无穷小坐标变换为

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu.$$

边界是 $y = 0$ ，所以必须有

$$\epsilon^y(x, 0) = 0.$$

Ward identity 中会出现边界项。为了让边界不破坏共形守恒，需要法向能流为零：

$$T^{xy}(x, 0) = 0.$$

在复坐标中，这正是

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}), \quad z = \bar{z}.$$

用 mode 展开

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_n \bar{L}_n \bar{z}^{-n-2}.$$

在上半平面的实轴边界 $z = \bar{z} = x$ 上，形式上得到

$$L_n = \bar{L}_n.$$

但是在 closed-string channel 中，边界态是 radial quantization 里的一个 state，标准 gluing condition 变为

$$(L_n - \bar{L}_{-n})|B\rangle = 0.$$

上半平面语言中的

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z})$$

和边界态语言中的

$$(L_n - \bar{L}_{-n})|B\rangle = 0$$

是同一个物理条件的两种表达。前者说边界无能流，后者说边界态保持对角 Virasoro symmetry。

3 Doubling Trick: 为什么 BCFT 只有一份手征代数

因为边界把左右运动自由度联系起来，所以可以把右运动自由度看作左运动自由度在下半平面的解析延拓。定义

$$T_{\text{double}}(z) = \begin{cases} T(z), & \text{Im } z > 0, \\ \bar{T}(\bar{z}), & \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

由于边界上 $T = \bar{T}$ ，这个拼接是连续的。因此 BCFT 可以用一份 holomorphic field 描述。

因此 open-chain Hilbert space 不是

$$\mathcal{V}_i \otimes \bar{\mathcal{V}}_j,$$

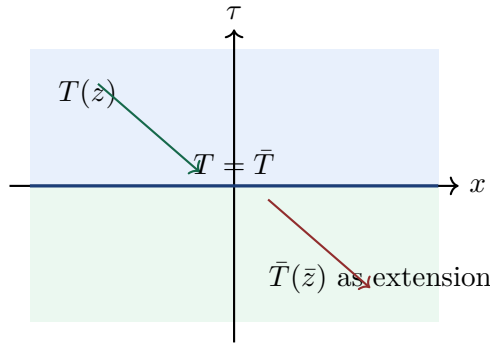


图 2: Doubling trick: 把右运动场延拓到下半平面。

而是只由一份 chiral algebra 的表示组成:

$$\mathcal{H}_{AB} = \bigoplus_i n_{AB}^i \mathcal{V}_i.$$

这里 A, B 是区间两端的边界条件, $n_{AB}^i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是表示 \mathcal{V}_i 出现的重数。

4 Bulk Primary、Boundary Primary 与 Boundary Changing Operator

bulk CFT 中的 primary field 写作

$$\phi_i(z, \bar{z}),$$

具有 conformal weights

$$(h_i, \bar{h}_i).$$

在有边界时, bulk operator 靠近边界会展开成边界算符:

$$\phi_i(z, \bar{z}) \sim \sum_a C_{ia}^A (2 \operatorname{Im} z)^{h_a - h_i - \bar{h}_i} \psi_a^A(x).$$

这叫 bulk-boundary OPE。

边界算符 $\psi_a^A(x)$ 只有一个 scaling dimension h_a , 因为边界是一维的, 只剩下一份 conformal symmetry。

两个边界算符的 OPE 形如

$$\psi_a^{AB}(x) \psi_b^{BC}(y) \sim \sum_c C_{ab}^c (x - y)^{h_c - h_a - h_b} \psi_c^{AC}(y).$$

这里 ψ_a^{AB} 是 boundary changing operator, 它把边界条件 A 改成 B 。

bulk OPE 是 bulk field 与 bulk field 的短距离展开; boundary OPE 是 boundary field 与 boundary field 的短距离展开; bulk-boundary OPE 则描述 bulk field 靠近边界时如何被边界自由度吸收。

5 Annulus: Open Channel 与 Closed Channel

BCFT 中最重要的是 annulus。它可以有两种量子化方式。

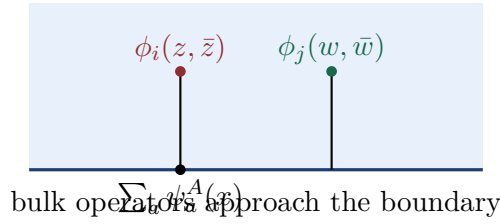


图 3: bulk-boundary OPE: bulk primary 靠近边界时展开成 boundary primaries。

5.1 Open-string channel

把空间看作长度为 L 的区间，两端边界条件分别是 A, B 。虚时间方向周期为 β 。partition function 是

$$Z_{AB} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{AB}} e^{-\beta H_{AB}^{\text{open}}}.$$

由于 BCFT 只有一份 Virasoro algebra,

$$H_{AB}^{\text{open}} = \frac{\pi}{L} \left(L_0 - \frac{c}{24} \right).$$

因此

$$Z_{AB}(q) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{AB}} q^{L_0 - c/24}, \quad q = e^{-\pi\beta/L}.$$

将 open-chain Hilbert space 分解为 chiral representations:

$$\mathcal{H}_{AB} = \bigoplus_i n_{AB}^i \mathcal{V}_i,$$

得到

$$Z_{AB}(q) = \sum_i n_{AB}^i \chi_i(q).$$

5.2 Closed-string channel

也可以把 annulus 转九十度，把原来的空间方向看成 Euclidean time。此时传播的是 bulk closed-string states，两端边界变成边界态：

$$|A\rangle, \quad |B\rangle.$$

于是

$$Z_{AB} = \langle A | \tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0 + \bar{L}_0 - c/12)} | B \rangle, \quad \tilde{q} = e^{-4\pi L/\beta}.$$

open channel 与 closed channel 描述的是同一个几何，因此二者必须相等。这一要求就是 Cardy consistency 的来源。

6 Ishibashi State

closed channel 中，边界态必须满足共形 gluing condition:

$$(L_n - \bar{L}_{-n})|B\rangle = 0.$$

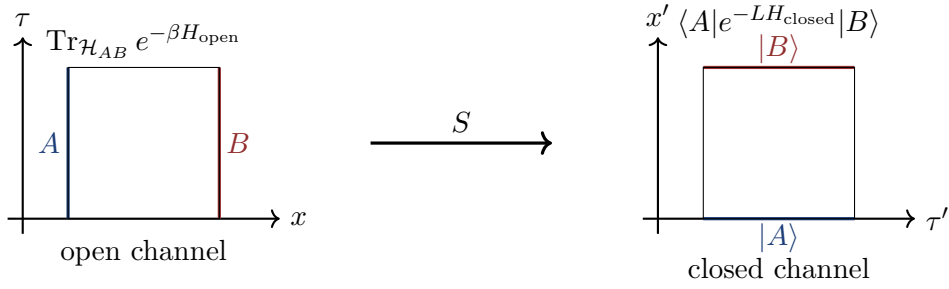


图 4: annulus 的两种量子化: open channel 与 closed channel。二者由 modular S transformation 联系。

假设 bulk Hilbert space 中有 diagonal sector

$$\mathcal{V}_i \otimes \bar{\mathcal{V}}_i.$$

那么可以在这个 sector 中构造一个 Ishibashi state:

$$|i\rangle\rangle.$$

它满足

$$(L_n - \bar{L}_{-n})|i\rangle\rangle = 0.$$

直观地说, Ishibashi state 是把左边 representation \mathcal{V}_i 中的每个 descendant 与右边对应 descendant 配对:

$$|i\rangle\rangle = \sum_N |i, N\rangle \otimes U\overline{|i, N\rangle}.$$

其中 N 标记 descendant level, U 是一个反么正映射, 用来保证左右 Virasoro generators 以正确方式粘合。

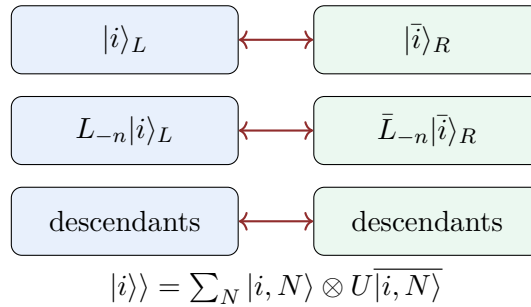


图 5: Ishibashi state: 在同一个 representation 的左右 sectors 中逐层配对。

Ishibashi state 不是最终的物理边界态。它只是满足 Virasoro gluing condition 的 building block。真正的物理边界态还必须满足 annulus partition function 的整数谱条件。

一般边界态写作

$$|A\rangle = \sum_i A_i |i\rangle\rangle.$$

7 Cardy Condition

设

$$|A\rangle = \sum_i A_i |i\rangle, \quad |B\rangle = \sum_i B_i |i\rangle.$$

Ishibashi states 的 closed-channel amplitude 给出

$$Z_{AB} = \sum_i A_i B_i \chi_i(\tilde{q}).$$

另一方面, open channel 中必须有

$$Z_{AB} = \sum_j n_{AB}^j \chi_j(q), \quad n_{AB}^j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

characters 通过 modular transformation 联系:

$$\chi_i(\tilde{q}) = \sum_j S_{ij} \chi_j(q).$$

所以

$$Z_{AB} = \sum_{i,j} A_i B_i S_{ij} \chi_j(q).$$

比较 open channel 得到

$$n_{AB}^j = \sum_i A_i B_i S_{ij}.$$

Cardy condition 是

$$n_{AB}^j = \sum_i A_i B_i S_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

它要求 closed-channel 边界态振幅能够被解释成 open-channel Hilbert space 的合法谱。

这条公式是 BCFT 的核心。它说明并不是任意 Ishibashi state 的线性组合都可以作为物理边界态。物理边界态必须给出非负整数的 open-channel spectrum。

8 Cardy 解与 Verlinde Formula

对 diagonal rational CFT, bulk Hilbert space 为

$$\mathcal{H}_{\text{bulk}} = \bigoplus_i \mathcal{V}_i \otimes \bar{\mathcal{V}}_i.$$

Cardy 给出一组标准解:

$$|a\rangle = \sum_i \frac{S_{ai}}{\sqrt{S_{0i}}} |i\rangle.$$

这里 0 表示 identity primary。

将它代入 Cardy condition:

$$n_{ab}^j = \sum_i \frac{S_{ai} S_{bi} S_{ij}}{S_{0i}}.$$

由 Verlinde formula,

$$N_{ab}^j = \sum_i \frac{S_{ai} S_{bi} S_{ji}^*}{S_{0i}}.$$

对于实的 modular S matrix, 得到

$$n_{ab}^j = N_{ab}^j.$$

Cardy 解的深刻含义是:

边界条件之间的 open spectrum = bulk primary 的 fusion rule.

也就是说, boundary conditions 的分类和 bulk primary fields 的 fusion algebra 是同一套结构。

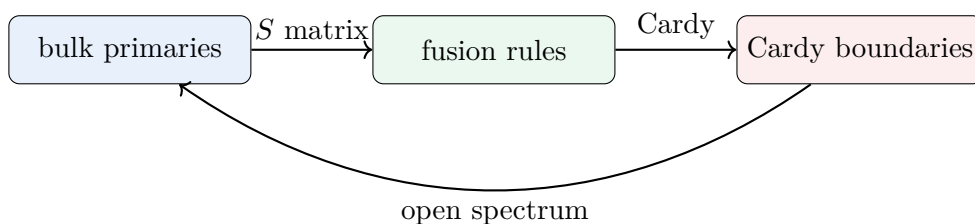


图 6: Cardy 解把 bulk primary、fusion rule 与 boundary condition 联系起来。

9 例子: Ising CFT 的三个边界条件

Ising CFT 有三个 primary:

$$\mathbf{1}, \quad \sigma, \quad \epsilon,$$

共形权重为

$$h_{\mathbf{1}} = 0, \quad h_{\sigma} = \frac{1}{16}, \quad h_{\epsilon} = \frac{1}{2}.$$

因此 diagonal Ising CFT 有三个 Cardy boundary states。它们可以理解成临界 Ising 模型的三种边界条件:

$$|+\rangle, \quad |-\rangle, \quad |f\rangle.$$

其中 $|+\rangle, |-\rangle$ 是固定边界, $|f\rangle$ 是自由边界。

Ising 模型有 \mathbb{Z}_2 spin-flip symmetry:

$$\sigma \rightarrow -\sigma.$$

它交换两个固定边界:

$$|+\rangle \leftrightarrow |-\rangle,$$

但保持自由边界:

$$|f\rangle \rightarrow |f\rangle.$$

因此 $|f\rangle$ 是 \mathbb{Z}_2 -invariant boundary state。

这个例子已经展示了后面 anomaly 讨论的核心逻辑: 若某个对称保持某个 Cardy boundary state, 那么这个边界条件可以作为对称 gapped boundary 的候选。

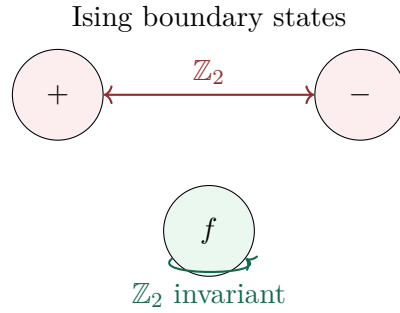


图 7: Ising CFT 中, \mathbb{Z}_2 交换固定边界, 保持自由边界。

10 自由 Compact Boson: Dirichlet 与 Neumann

考虑 compact boson:

$$\phi \sim \phi + 2\pi R.$$

左右分解为

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi_L(z) + \phi_R(\bar{z}).$$

常见的两类边界条件是 Dirichlet 和 Neumann。

Dirichlet boundary condition 固定场本身:

$$\phi|_{\partial} = \phi_0.$$

它对应

$$\phi_L + \phi_R = \phi_0.$$

Neumann boundary condition 固定法向导数:

$$\partial_n \phi|_{\partial} = 0,$$

等价于固定 dual field:

$$\phi_L - \phi_R = \theta_0.$$

在 oscillator mode 语言中, Dirichlet 和 Neumann 条件分别对应

$$(a_n + \bar{a}_{-n})|D\rangle = 0,$$

$$(a_n - \bar{a}_{-n})|N\rangle = 0.$$



图 8: 自由 boson 的 Dirichlet 与 Neumann 边界条件。

更一般地, 如果理论有某个 chiral current $J(z)$ 和 anti-chiral current $\bar{J}(\bar{z})$, 边界条件可以写成

$$[J(z) - \rho(\bar{J}(\bar{z}))]|B\rangle = 0.$$

这里 ρ 是手征代数的 automorphism。不同 ρ 对应不同的 gluing pattern。

11 边界态与 Gapping Potential

Boundary CFT 不只是边界条件的分类工具。它还可以用来理解 massive deformation。考虑一个空间依赖的 relevant perturbation:

$$V(x) = \begin{cases} V_A(\phi), & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < L, \\ V_B(\phi), & x \geq L. \end{cases}$$

左右两侧被 relevant perturbation gap 掉，中间仍然是 CFT。低能下，中间 CFT 的两端就感受到两个 boundary conditions:

$$A, \quad B.$$

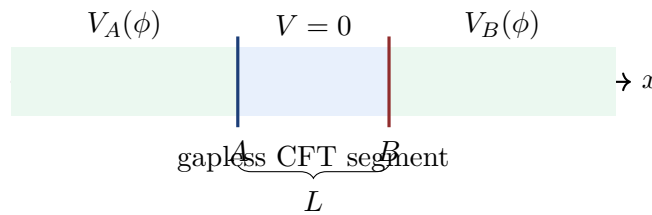


图 9: 空间依赖的 gapping potential 产生 BCFT 的边界条件。

因此有对应关系:

$$\boxed{\text{relevant gapping potential} \longleftrightarrow \text{conformal boundary condition.}}$$

自由 boson 中，这一点尤其清楚。例如

$$H' = U \int dx \cos(\phi/R - \alpha)$$

会把 ϕ pin 在势能极小值，所以对应 Dirichlet boundary condition。类似地，pin dual field θ 对应 Neumann boundary condition。

12 Boundary CFT 与 Anomaly: Oshikawa 的观点

现在加入一个全局对称群 G 。考虑左右两边 gapping potentials 相差一个对称变换:

$$V_B = gV_Ag^{-1}, \quad g \in G.$$

如果 V_A 本身保持 G ，那么左右两边实际上是同一个对称 gapped phase。当中间区间长度

$$L \rightarrow 0$$

时，整个系统应该成为一个完全 gapped 的系统。

如果这个 gapped ground state 唯一，那么 partition function 应该满足

$$Z_{AA}(q) \rightarrow 1.$$

open channel 中, $q \rightarrow 0$ 极限数的是 identity representation 的重数。identity 只出现一次, 表示唯一基态。

closed channel 中, 同样的条件写成

$$\langle A|g|A\rangle = 1, \quad \forall g \in G.$$

这意味着

$$g|A\rangle = |A\rangle.$$

Oshikawa 等人的核心判据可以写成

存在 G -invariant Cardy boundary state \Rightarrow 可以对称地 gap 到唯一基态 $\Rightarrow G$ anomaly-free.

反过来, 若不存在这样的对称 Cardy boundary state, 则说明该 CFT 在对称 G 下有 LSM 型不可开隙性, 也就是有't Hooft anomaly。

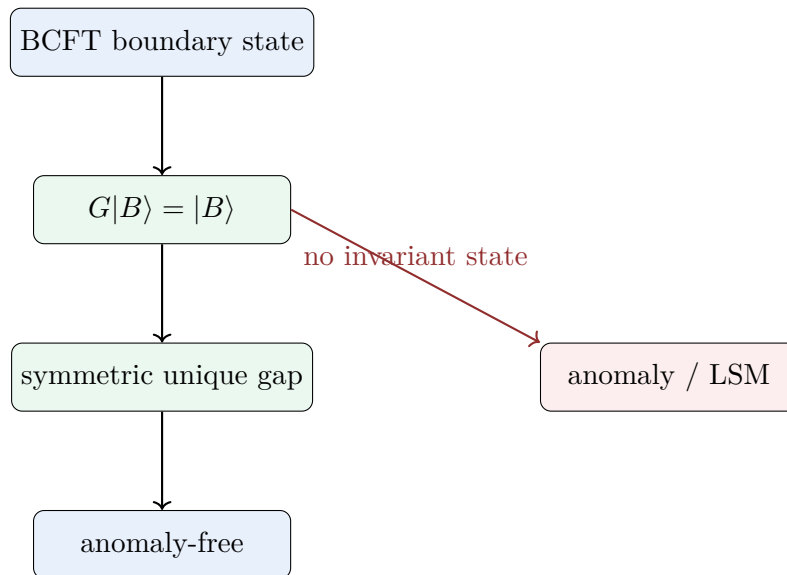


图 10: Oshikawa 观点: 对称边界态的存在诊断 anomaly-free; 不存在则对应 LSM 型不可开隙。

12.1 $SU(N)_k$ WZW model 的例子

对 WZW model, Cardy states 可以用 affine Dynkin labels 标记。以 $SU(N)_k$ 为例, Cardy state 的 label 是

$$[\lambda_0; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}],$$

并满足 level 条件

$$k = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1}.$$

中心对称 \mathbb{Z}_N 作用为 affine Dynkin diagram 的循环置换:

$$[\lambda_0; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}] \mapsto [\lambda_{N-1}; \lambda_0, \dots, \lambda_{N-2}].$$

若要存在 center-invariant Cardy state, 就必须有

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{N-1}.$$

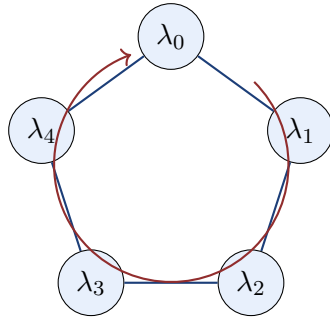
因此

$$k = N\lambda_0.$$

所以

$$\boxed{\text{SU}(N)_k \text{ 在 } PSU(N) \times \mathbb{Z}_N \text{ 下 anomaly-free} \iff k \in N\mathbb{Z}.}$$

Affine Dynkin labels of SU(5)



center symmetry acts as cyclic outer automorphism

图 11: $SU(N)_k$ 中, 中心对称作用为 affine Dynkin labels 的循环置换。存在不动点要求所有 λ_i 相等。

这个结论正是 $SU(N)$ spin chain 的 LSM anomaly index 的 CFT 表达。若 $k \notin N\mathbb{Z}$, 则低能 CFT 不能被 $PSU(N) \times \mathbb{Z}_N$ 对称地 gap 到唯一基态。

12.2 T-duality 的意义

对 $SU(2)_1$ WZW model, 也就是 self-dual compact boson, 存在 T-duality:

$$T\phi T^{-1} = \theta, \quad T\theta T^{-1} = \phi.$$

这个对称不仅作用在 zero mode 上, 还作用在整个 oscillator mode 上, 因此比普通 internal symmetry 更微妙。

Oshikawa 等人指出, 纯 T-duality symmetry 没有 anomaly, 可以找到 invariant Cardy boundary state, 并得到对称 gapping potential:

$$H' = U \left[\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

这个例子很重要, 因为它说明 BCFT 方法不只是重写 Haldane null-vector gapping condition, 而是能发现更一般的对称开隙方式。

13 总结: 学习 Boundary CFT 的主线

Boundary CFT 的逻辑可以压缩成以下链条:

$$T = \bar{T} \Rightarrow (L_n - \bar{L}_{-n})|B\rangle = 0 \Rightarrow |B\rangle = \sum_i A_i |i\rangle \Rightarrow Z_{\text{closed}} = Z_{\text{open}} \Rightarrow \text{Cardy condition}.$$

其中

$$Z_{\text{open}} = \sum_j n_{AB}^j \chi_j(q), \quad Z_{\text{closed}} = \sum_i A_i B_i \chi_i(\tilde{q}).$$

modular transformation 给出

$$n_{AB}^j = \sum_i A_i B_i S_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

对 diagonal rational CFT, Cardy 解为

$$|a\rangle = \sum_i \frac{S_{ai}}{\sqrt{S_{0i}}} |i\rangle,$$

并且

$$n_{ab}^j = N_{ab}^j.$$

最重要的物理图像是：

边界条件 = 左右 movers 的 gluing = 某种 gapped phase 的低能影子.

在现代 anomaly 语境中：

对称 Cardy boundary state \iff 对称唯一 gapped phase \iff 无 anomaly.

参考文献

- [1] J. L. Cardy, *Boundary Conditions, Fusion Rules and the Verlinde Formula*, Nucl. Phys. B **324**, 581–596 (1989).
- [2] J. Cardy, *Boundary Conformal Field Theory*, arXiv:hep-th/0411189.
- [3] N. Ishibashi, *The Boundary and Crosscap States in Conformal Field Theories*, Mod. Phys. Lett. A **4**, 251–264 (1989).
- [4] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer (1997).
- [5] L. Li, C.-T. Hsieh, Y. Yao, and M. Oshikawa, *Boundary conditions and anomalies of conformal field theories in 1+1 dimensions*, Phys. Rev. B **110**, 045118 (2024).
- [6] F. D. M. Haldane, *Stability of Chiral Luttinger Liquids and Abelian Quantum Hall States*, Phys. Rev. Lett. **74**, 2090 (1995).
- [7] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Two Soluble Models of an Antiferromagnetic Chain*, Ann. Phys. **16**, 407–466 (1961).
- [8] M. Oshikawa, *Commensurability, Excitation Gap, and Topology in Quantum Many-Particle Systems on a Periodic Lattice*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1535 (2000).