从普通 CDW 到 Kagome Chiral CDW 与 Loop Current

Peierls 响应函数、超导竞争、陈仙辉实验线索与吴从军–张首晟模型

Lecture note

2026 年 6 月 27 日

摘要

本文从最基本的电荷密度波（charge density wave, CDW）理论出发，先说明静态电荷响应函数 $\chi(q)$ 如何导致 Peierls 不稳定性，再推广到多轨道、多子晶格体系中的 form-factor CDW、bond order 与 orbital order。随后讨论 CDW 与超导的关系：普通超导对应 particle-particle channel 的 $Q = 0$ Cooper 响应，而 PDW 对应有限总动量 Cooper pair。最后结合 CsV_3Sb_5 中陈仙辉组及相关实验观察到的 CDW、AHE、NMR orbital order、nematicity 和 pressure double dome superconductivity，说明 kagome CDW 为什么不应被简单理解为普通 nesting CDW。本文还回顾 Capponi–Wu–Zhang 在 bilayer model 中构造并用 QMC 验证的 current-carrying ground state，以此阐明 loop current order 的核心数学结构：

$$\operatorname{Im}\left\langle c_i^\dagger c_j\right\rangle \neq 0.$$

目录

1 最小图像：CDW 是 particle-hole 凝聚

CDW 的序参量可以写成

$$\rho_{\boldsymbol{Q}} = \sum_{\boldsymbol{k},\alpha} \left\langle c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q},\alpha} c_{\boldsymbol{k},\alpha} \right\rangle, \tag{1}$$

其中 α 可以表示自旋、轨道或子晶格。若 $\rho_{\boldsymbol{Q}} \neq 0$，电子密度出现周期调制

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_0 + ho_{\boldsymbol{Q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}} + \rho_{-\boldsymbol{Q}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{2}$$

这会混合 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}$，并在满足

$$\xi_{\boldsymbol{k}} \simeq 0, \qquad \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}} \simeq 0 \tag{3}$$

的费米面区域打开能隙。

一句话

普通 CDW 是 particle-hole channel 的凝聚；普通超导是 particle-particle channel 的凝聚。两者的相似性在于都打开低能能隙，差别在于前者混合 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}$，后者配对 $\boldsymbol{k}$ 与 $-\boldsymbol{k}$。

2 Peierls 机制与静态电荷响应函数

加一个外部标量势

$$H_{\text{ext}} = \sum_q \varphi_q \rho_{-q}, \qquad \rho_q = \sum_{k,\sigma} c^\dagger_{k+q,\sigma} c_{k,\sigma}. \tag{4}$$

线性响应定义为

$$\delta\rho_q = \chi(q)\varphi_q. \tag{5}$$

在非相互作用电子气中，零频静态响应函数是 Lindhard function：

$$\chi_0(q) = g_s \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \frac{f(\epsilon_k) - f(\epsilon_{k+q})}{\epsilon_k - \epsilon_{k+q}}, \tag{6}$$

其中 g_s 是自旋简并度。本文采用的符号约定下，电子对正外势的响应通常为负，因此 $\chi_0(q) < 0$。有些文献定义 $\Pi(q) = -\chi(q) > 0$。

2.1 一维自由电子的显式计算

令

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \qquad f(\epsilon_k) = \theta(k_F - |k|). \tag{7}$$

对式 (6) 做变量替换，可以得到

$$\chi_0(q) = \int_{-k_F}^{k_F} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_{k+q}} - \frac{1}{\epsilon_{k-q} - \epsilon_k} \right] \tag{8}$$

$$= \frac{m}{\pi\hbar^2 q} \int_{-k_F}^{k_F} \mathrm{d}k \left[\frac{1}{2k-q} - \frac{1}{2k+q} \right]. \tag{9}$$

因此

$$\boxed{\chi_0^{1d}(q) = -\frac{g_s m}{\pi\hbar^2 q}\ln\left|\frac{q+2k_F}{q-2k_F}\right|.} \tag{10}$$

在 $q \to 2k_F$ 附近，

$$\chi_0^{1d}(q) \sim -\frac{g_s}{2\pi\hbar v_F}\ln\frac{4k_F}{|q-2k_F|}. \tag{11}$$

于是 $2k_F$ 处出现对数奇异性。

Peierls 不稳定性的数学核心

一维费米面只有两个点 $\pm k_F$。波矢 $2k_F$ 正好把一个费米点映到另一个费米点：

$$-k_F \longrightarrow +k_F.$$

因此电子系统对 $2k_F$ 密度调制的响应发散，任意弱的电子–声子耦合都可能导致晶格自发畸变。

2.2 声子软化与 CDW 形成

电子–声子耦合可写为

$$H_{e\text{-}ph} = g_q u_q \rho_{-q}. \tag{12}$$

晶格位移 u_q 的自由能为

$$F(q) = \frac{1}{2}K_q|u_q|^2 + \frac{1}{2}|g_q u_q|^2\chi_0(q) = \frac{1}{2}\left[K_q + |g_q|^2\chi_0(q)\right]|u_q|^2. \tag{13}$$

当

$$K_q + |g_q|^2\chi_0(q) < 0 \tag{14}$$

时，$u_q = 0$ 变得不稳定。由于一维 $\chi_0(2k_F) \to -\infty$，最容易软化的是 $q = 2k_F$ 模式。

因此产生

$$u(x) = u_0\cos(2k_F x + \phi), \qquad \rho(x) = \rho_0 + ho_{2k_F}\cos(2k_F x + \phi). \tag{15}$$

低能连续场论中，

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_F x}R(x) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_F x}L(x), \tag{16}$$

$2k_F$ 周期势产生质量项

$$H_{\mathrm{CDW}} = \Delta R^\dagger L + \Delta^* L^\dagger R, \tag{17}$$

能谱从

$$E = \pm v_F p \tag{18}$$

变为

$$E_\pm(p) = \pm\sqrt{(v_F p)^2 + |\Delta|^2}. \tag{19}$$

这就是 Peierls gap。

3 为什么不能把所有 CDW 都归结为 nesting

高维体系中，常说 CDW 来自 Fermi-surface nesting：若存在 $\boldsymbol{Q}$ 使得费米面上一大片区域满足

$$\xi_{\boldsymbol{k}} = 0, \qquad \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}} = 0, \tag{20}$$

那么 $\chi_0(\boldsymbol{Q})$ 会增强。可是二维、三维真实材料里，CDW 波矢往往不是单纯由 $\chi_0(\boldsymbol{q})$ 最大值决定，而是由

$$\chi_0(\boldsymbol{q}), \qquad |g(\boldsymbol{q})|^2, \qquad \Omega_{\boldsymbol{q}}, \qquad \text{orbital/sublattice matrix element} \tag{21}$$

共同决定。声子传播子可写成

$$D^{-1}(\boldsymbol{q},\omega) = D_0^{-1}(\boldsymbol{q},\omega) - |g(\boldsymbol{q})|^2\chi(\boldsymbol{q},\omega). \tag{22}$$

所以 CDW 本质上也可以理解为某个声子模的重整化频率软化：

$$\widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{Q}}^2 \to 0. \tag{23}$$

重要警告

“Nesting 好”并不自动推出“CDW 一定发生”。还必须看相互作用矩阵元、电子–声子耦合、轨道权重、晶格弹性以及 commensurability lock-in。这个警告对 kagome 尤其重要，因为 kagome 费米面上的 sublattice texture 会改变不同散射通道的矩阵元。

4 现代 CDW：site、bond、orbital 与 form factor

在单轨道最简单模型里，CDW 是 site charge order：

$$\delta n_i \neq 0. \tag{24}$$

但在多轨道、多子晶格体系里，更自然的序参量是矩阵：

$$\Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{Q}) = \left\langle c^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q},\alpha} c_{\boldsymbol{k},\beta} \right\rangle. \tag{25}$$

其中 α,β 可以是 sublattice、orbital 或 spin。若 Δ 的 form factor 主要在键上，则得到 bond order：

$$B_{ij} = \left\langle c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i \right\rangle. \tag{26}$$

若不同轨道占据发生周期重排，则得到 orbital order。若 form factor 带虚部，则进一步可能得到 current order。

从普通 CDW 到 exotic CDW

普通 CDW 主要问 δn_i；现代 CDW 还要问

$$\left\langle c_i^\dagger c_j \right\rangle, \qquad \langle n_{i,a} - n_{i,b} \rangle, \qquad \Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{Q}).$$

因此 CDW 可以表现为 charge order、bond order、orbital order、nematic order，甚至 loop current order。

5 超导、PDW 与 CDW 的响应函数语言

普通 CDW 属于 particle-hole channel：

$$\chi^0_{ph}(\boldsymbol{q}) = -\sum_{\boldsymbol{k},\alpha} \frac{f(\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}) - f(\xi_{\boldsymbol{k}})}{\xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \xi_{\boldsymbol{k}}}. \tag{27}$$

而普通 Cooper pairing 属于 particle-particle channel。定义

$$\Delta^g_0 = \sum_{\boldsymbol{k}} g(\boldsymbol{k}) c_{\boldsymbol{k}\uparrow} c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}, \tag{28}$$

其裸 pair susceptibility 为

$$\chi^0_{pp}(0) = \sum_{\boldsymbol{k}} |g(\boldsymbol{k})|^2 \frac{1-2f(\xi_{\boldsymbol{k}})}{2\xi_{\boldsymbol{k}}} \sim N(0) \ln \frac{\Lambda}{T}. \tag{29}$$

这就是 Cooper instability。

有限动量配对，即 pair-density wave, PDW，定义为

$$\Delta^g_{\boldsymbol{Q}} = \sum_{\boldsymbol{k}} g_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{k}) c_{\boldsymbol{Q}/2+\boldsymbol{k},\uparrow} c_{\boldsymbol{Q}/2-\boldsymbol{k},\downarrow}. \tag{30}$$

对应的 pair susceptibility 是

$$\chi^0_{pp}(\boldsymbol{Q}) = \sum_{\boldsymbol{k}} |g_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{k})|^2 \frac{1 - f(\xi_{\boldsymbol{Q}/2+\boldsymbol{k}}) - f(\xi_{\boldsymbol{Q}/2-\boldsymbol{k}})}{\xi_{\boldsymbol{Q}/2+\boldsymbol{k}} + \xi_{\boldsymbol{Q}/2-\boldsymbol{k}}}. \tag{31}$$

因此 PDW 的几何条件是

$$\xi_{\boldsymbol{Q}/2+\boldsymbol{k}} \simeq 0, \qquad \xi_{\boldsymbol{Q}/2-\boldsymbol{k}} \simeq 0. \tag{32}$$

这不是 CDW 的 nesting 条件，而是 finite-momentum Cooper nesting。

真正判断 SC 或 PDW 时，应求解线性化 gap equation：

$$\lambda_{\boldsymbol{Q}} \Delta_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k}'} V_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \frac{1 - f(\xi_{\boldsymbol{Q}/2+\boldsymbol{k}'}) - f(\xi_{\boldsymbol{Q}/2-\boldsymbol{k}'})}{\xi_{\boldsymbol{Q}/2+\boldsymbol{k}'} + \xi_{\boldsymbol{Q}/2-\boldsymbol{k}'}} \Delta_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{k}'). \tag{33}$$

若最大本征值在 $\boldsymbol{Q}=0$ 处先达到 1，就是普通超导；若最大本征值在 $\boldsymbol{Q}\neq 0$ 处先达到 1，就是 PDW/FFLO-like instability。

5.1 CDW 与 SC 的竞争和合作

静态 CDW 会开 partial gap，降低低能态密度 $N(0)$，因此通常竞争超导。但 CDW fluctuations 也可以作为 pairing glue：

$$V_{\text{eff}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \sim |g|^2 \chi_{ph}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \tag{34}$$

若 $\chi_{ph}(\boldsymbol{Q})$ 很强，配对函数会倾向于在被 $\boldsymbol{Q}$ 连接的费米面区域之间改变符号，以利用排斥相互作用产生有效吸引。

此外，CDW 与 SC/PDW 在 Landau 理论中天然耦合：

$$F_{\text{int}} = \gamma \rho_{\boldsymbol{Q}} \Delta_0^* \Delta_{\boldsymbol{Q}} + h.c. \tag{35}$$

所以若同时存在 uniform SC 与 CDW，PDW 可以被诱导；反过来，若 PDW 是 primary order，常会诱导 charge modulation：

$$\Delta_{\boldsymbol{Q}} \Delta^*_{-\boldsymbol{Q}} \sim \rho_{2\boldsymbol{Q}}. \tag{36}$$

6 Kagome 中为什么容易出现 exotic CDW

kagome 晶格有三个核心特征：

$$\text{Dirac cone}, \qquad \text{flat band}, \qquad \text{van Hove singularity}. \tag{37}$$

在 van Hove 附近，费米面常由三个 M 点附近的 patch 组成。三组等价 CDW 波矢

$$\boldsymbol{Q}_1, \quad \boldsymbol{Q}_2, \quad \boldsymbol{Q}_3 \tag{38}$$

可以同时参与，使得 triple-Q order 很自然。序参量可写为

$$\Delta_a = |\Delta_a| e^{i\phi_a}, \qquad a = 1, 2, 3. \tag{39}$$

若三个 Δ_a 等价，得到较高对称性的 triple-Q CDW；若某一个方向被选中，得到 nematic/stripe-like order；若相对相位形成手性结构，则可能得到 chiral CDW。

更关键的是，kagome 有三个子晶格。即使费米面几何 nesting 很好，散射矩阵元也依赖 Bloch 波函数的 sublattice weight。因此 kagome CDW 的序参量不只是标量 $\rho_{\boldsymbol{Q}}$，而是带有子晶格和轨道结构的矩阵 $\Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Q})$。这正是 kagome Hubbard/extended Hubbard 理论中出现 bond order、Pomeranchuk order、chiral SC、chiral SDW、loop current order 的原因。

7 Chiral CDW 与 loop current order

7.1 键电流的定义

从 tight-binding Hamiltonian 出发：

$$H_t = -\sum_{\langle ij \rangle} t_{ij} c_i^\dagger c_j + h.c. \tag{40}$$

由连续性方程得到键电流算符

$$J_{ij} = \frac{ie}{\hbar} \left(t_{ij} c_i^\dagger c_j - t_{ij}^* c_j^\dagger c_i \right). \tag{41}$$

若 $t_{ij} = t \in \mathbb{R}$，则

$$\langle J_{ij} \rangle = -\frac{2et}{\hbar} \operatorname{Im} \left\langle c_i^\dagger c_j \right\rangle. \tag{42}$$

因此 loop current order 的核心是

$$\boxed{\operatorname{Im} \left\langle c_i^\dagger c_j \right\rangle \neq 0.} \tag{43}$$

普通 bond order 是实部：

$$\operatorname{Re} \left\langle c_i^\dagger c_j \right\rangle \neq 0, \tag{44}$$

而 loop current 是虚部：

$$\operatorname{Im} \left\langle c_i^\dagger c_j \right\rangle \neq 0. \tag{45}$$

loop current 的物理含义

普通 CDW 让电荷在不同位置多一点少一点；bond CDW 让不同键强弱不同；loop current CDW 则让电子在三角形或六边形回路上自发绕圈流动。它破坏时间反演，但不一定产生大的净铁磁矩。

在 kagome 中，三角形和六边形天然提供环流路径。若电流在 plaquette 上形成

$$\circlearrowleft \quad \text{或} \quad \circlearrowright, \tag{46}$$

系统就自发选择左手或右手结构。时间反演作用为

$$\mathcal{T}: J_{ij} \mapsto -J_{ij}. \tag{47}$$

所以 loop current order 必然破坏时间反演。

7.2 从 imaginary bond order 到 Berry curvature

如果

$$\left\langle c_i^\dagger c_j \right\rangle = B_{ij} + \mathrm{i}I_{ij}, \tag{48}$$

则平均场 Hamiltonian 中有效 hopping 变成

$$t_{ij}^{\mathrm{eff}} = t + \delta t_{ij} + \mathrm{i}W_{ij}. \tag{49}$$

虚 hopping 等价于自发产生的 Peierls phase 或 orbital flux。它类似 Haldane model：没有外加均匀磁场，但能带可以获得非零 Berry curvature。内禀 anomalous Hall conductivity 可写成

$$\sigma_{xy}^{\mathrm{int}} = -\frac{e^2}{\hbar}\sum_n \int_{\mathrm{BZ}} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} f_{n\boldsymbol{k}} \Omega_n^z(\boldsymbol{k}). \tag{50}$$

若时间反演保持，$\Omega_n^z(\boldsymbol{k}) = -\Omega_n^z(-\boldsymbol{k})$，积分通常抵消。loop current 破坏时间反演后，可以产生非零 AHE。

8 陈仙辉组及相关 CsV_3Sb_5 实验证据

CsV_3Sb_5 是 kagome 超导金属，常压下有 $T_{\mathrm{CDW}} \sim 94\,\mathrm{K}$ 的 CDW-like transition，并在低温出现超导。它的特殊性不是简单 “有 CDW 又有 SC”，而是 CDW、轨道、手性响应、nematicity 与 superconductivity 彼此纠缠。

8.1 AHE 与 CDW 同时出现

F. H. Yu 等在 CsV_3Sb_5 中报道巨大 anomalous Hall effect，并指出 AHE 的出现与 CDW transition 密切相关。其异常霍尔电导可达

$$\sigma_{xy}^{A} \sim 2.1 \times 10^4\,\Omega^{-1}\mathrm{cm}^{-1}, \tag{51}$$

量级甚至超过许多铁磁金属。普通 AHE 常见于铁磁体；但 CsV_3Sb_5 不是普通铁磁金属。因此这暗示 CDW 相中可能存在 Berry curvature 重构、orbital magnetism、chiral flux 或其他时间反演破缺机制。

谨慎表述

AHE 与 CDW 共现并不等于已经唯一证明 loop current pattern。更稳妥的说法是：实验表明 CDW 相和 Hall response 强相关，loop current/chiral flux 是解释这种现象的重要候选机制。

8.2 NMR：CDW 与 orbital order

D. W. Song 等对 CsV_3Sb_5 做 ^{51}V 与 ^{133}Cs NMR，观察到 ^{51}V Knight shift 在 $T_s \sim 94\,\mathrm{K}$ 处突然劈裂，显示这是一个一级转变，并且局域电子环境在 CDW 相中变得不等价。重要的是，这种分裂主要与 orbital shift 有关。因此该工作提出：CDW-like transition 中存在显著 orbital order 和 orbital fluctuations。

这说明 CsV_3Sb_5 的 CDW 不应被简单看成

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_0 + ho_{\boldsymbol{Q}} \cos(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{r}), \tag{52}$$

而更接近

$$\text{charge modulation} + \text{bond/orbital reconstruction} + \text{3D structural modulation.} \tag{53}$$

8.3 CDW-driven nematicity

L. Nie 等通过 elastoresistance、NMR 和 STM/STS 研究 CsV_3Sb_5，报告 CDW 驱动的 electronic nematicity。对于 kagome/hexagonal 背景，nematicity 可理解为三种等价方向中选出一种，常用 Z_3 或 three-state Potts nematic 来描述。

在 triple-Q 语言中，若

$$|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta_3|, \tag{54}$$

旋转对称性较高；若

$$|\Delta_1| \neq |\Delta_2| = |\Delta_3|, \tag{55}$$

则系统选出一个方向，产生 nematicity。

8.4 Pressure double dome superconductivity

K. Y. Chen 等通过高压输运和磁化率发现，CsV_3Sb_5 的 CDW transition 随压力降低并最终被压制，而 $T_c(P)$ 呈现不寻常的 double-dome 或 M-shaped 结构，T_c 可增强到约 $8\,\mathrm{K}$。这说明 CDW 与 SC 不是简单单调竞争，而可能存在多种 CDW 或 CDW fluctuation 区域，并与 superconductivity 发生复杂耦合。

实验主线

陈仙辉报告中关于 kagome CDW 的物理重点可以压缩为：

$$\text{CDW} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{orbital order / nematicity / AHE / SC dome.}$$

因此 CsV_3Sb_5 的 CDW 更像一个多分量电子母相，而非单纯 Peierls density wave。

9 吴从军–张首晟：current-carrying ground state 的可控模型

吴从军、张首晟与 Capponi 的工作并不是 kagome 模型，而是 bilayer model 中的 current-carrying ground state。它的重要性在于：它把 loop current 从一个漂亮猜想推进到一个具有代数结构和 QMC 证据的可控模型中。

定义上下两层电子为 c 与 d。三个局域算符可写为

$$n_1(i) = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_\sigma \left(c^\dagger_{i\sigma}d_{i\sigma} - d^\dagger_{i\sigma}c_{i\sigma}\right), \tag{56}$$

$$n_5(i) = \frac{1}{2}\sum_\sigma \left(c^\dagger_{i\sigma}d_{i\sigma} + d^\dagger_{i\sigma}c_{i\sigma}\right), \tag{57}$$

$$Q(i) = \frac{1}{2}\sum_\sigma \left(c^\dagger_{i\sigma}c_{i\sigma} - d^\dagger_{i\sigma}d_{i\sigma}\right). \tag{58}$$

其中

$$n_1 : \text{interlayer current}, \qquad n_5 : \text{interlayer real bond order}, \qquad Q : \text{layer CDW}. \tag{59}$$

这三个量形成一个 pseudospin SU(2) 结构。于是 CDW、rung kinetic order 和 current order 可以被看作同一个赝自旋在不同方向上的取向。

尤其是

$$n_1(i) \propto \mathrm{Im}\left\langle c^\dagger_{i\sigma}d_{i\sigma}\right\rangle. \tag{60}$$

因此它正是 interlayer bond expectation value 的虚部。若

$$\langle n_1(i)\rangle = (-1)^i n_1, \tag{61}$$

就得到 staggered interlayer current。QMC 结果表明，在适当参数区域，该 current-current correlation 在 $\boldsymbol{Q} = (\pi,\pi)$ 处有长程序。

吴老师工作的思想价值

这项工作告诉我们：

$$\mathrm{Im}\left\langle c^\dagger_i c_j\right\rangle$$

可以是相互作用稳定的真实序参量，而不是平均场虚构。kagome loop current order 与它共享同一个数学内核，只是电流从 bilayer rung 换成 kagome plaquette 上的环流。

10 把三条线合起来

现在可以把 CDW、SC、loop current 和 kagome 实验放在同一张逻辑图中：

$$\begin{aligned}
&\text{Peierls/CDW theory:} && \chi_{ph}(\boldsymbol{q}) \text{ 增强，产生 particle-hole order},\\
&\text{SC/PDW theory:} && \chi_{pp}(\boldsymbol{Q}) \text{ 或 gap equation 产生 Cooper order},\\
&\text{kagome geometry:} && \text{van Hove} + \text{sublattice form factor} + 3Q \text{ degeneracy},\\
&\text{Chen experiments:} && \text{CDW} + \text{AHE} + \text{orbital order} + \text{nematicity} + \text{SC domes},\\
&\text{Wu–Zhang idea:} && \mathrm{Im}\left\langle c^\dagger_i c_j\right\rangle \neq 0 \text{ 是 current order}.
\end{aligned} \tag{62}$$

因此 kagome exotic CDW 的合理理解是

$$\boxed{\text{kagome CDW} = \text{charge/bond/orbital order} + \text{possible loop current} + \text{SC competition/cooperation}.} \tag{63}$$

11 最精炼的物理图像

普通 CDW：

$$\rho_{\boldsymbol{Q}} = \left\langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q}} c_{\boldsymbol{k}} \right\rangle \neq 0. \tag{64}$$

Bond/orbital CDW：

$$\Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Q}) = \left\langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{Q},\alpha} c_{\boldsymbol{k},\beta} \right\rangle \neq 0. \tag{65}$$

Loop current CDW：

$$\operatorname{Im} \left\langle c^{\dagger}_{i} c_{j} \right\rangle \neq 0, \qquad \langle J_{ij} \rangle \neq 0. \tag{66}$$

普通 SC：

$$\Delta_0 = \langle c_{\boldsymbol{k}\uparrow} c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \rangle \neq 0. \tag{67}$$

PDW：

$$\Delta_{\boldsymbol{Q}} = \langle c_{\boldsymbol{Q}/2+\boldsymbol{k},\uparrow} c_{\boldsymbol{Q}/2-\boldsymbol{k},\downarrow} \rangle \neq 0. \tag{68}$$

最终结论

陈仙辉讲的 kagome exotic CDW，真正有趣之处不是“又发现一个 CDW”，而是 CDW 在 kagome 上变成了一个多通道母相：它重构费米面，也可能重构 Berry curvature；它与 orbital order、nematicity、AHE 和 superconductivity 纠缠；它还可能包含吴从军–张首晟 loop-current 思想中的核心结构，即虚的键序参量。

参考文献

[1] G. Grüner, “The dynamics of charge-density waves,” Rev. Mod. Phys. **60**, 1129 (1988).

[2] M. D. Johannes and I. I. Mazin, “Fermi surface nesting and the origin of charge density waves in metals,” Phys. Rev. B **77**, 165135 (2008).

[3] S. Capponi, C. Wu, and S.-C. Zhang, “Current Carrying Ground State in a Bi-layer Model,” Phys. Rev. B **70**, 220505(R) (2004).

[4] M. L. Kiesel, C. Platt, and R. Thomale, “Unconventional Fermi surface instabilities in the kagome Hubbard model,” Phys. Rev. Lett. **110**, 126405 (2013).

[5] W.-S. Wang, Z.-Z. Li, Y.-Y. Xiang, and Q.-H. Wang, “Competing electronic orders on kagome lattices at van Hove filling,” Phys. Rev. B **87**, 115135 (2013).

[6] F. H. Yu, T. Wu, Z. Y. Wang, B. Lei, W. Z. Zhuo, J. J. Ying, and X. H. Chen, “Concurrence of anomalous Hall effect and charge density wave in a superconducting topological kagome metal,” Phys. Rev. B **104**, L041103 (2021).

[7] D. W. Song *et al.*, “Orbital ordering and fluctuations in a kagome superconductor CsV_3Sb_5,” Sci. China Phys. Mech. Astron. **65**, 247462 (2022).

[8] L. Nie *et al.*, “Charge-density-wave-driven electronic nematicity in a kagome superconductor,” Nature **604**, 59–64 (2022).

[9] K. Y. Chen *et al.*, “Double superconducting dome and triple enhancement of T_c in the kagome superconductor CsV_3Sb_5 under high pressure,” Phys. Rev. Lett. **126**, 247001 (2021).

[10] X. Feng, K. Jiang, Z. Wang, and J. Hu, “Chiral flux phase in the kagome superconductor AV_3Sb_5,” Sci. Bull. **66**, 1384–1388 (2021).