

Sang-Wook Cheong 报告笔记： 从 Chirality 到 Time Chirality 的 P, T, PT 对称性语言

根据现场笔记与讨论整理

一句话总览

Cheong 的报告不是从一个具体哈密顿量出发，而是在建立一张低对称性量子材料的响应地图。核心问题是：材料、畴结构、光场、输运几何在 P, T, PT 下如何变换？普通 chirality 是空间的左手/右手，time chirality 是时间正放/倒放的不等价，chirality prime 是磁电式的空间手性加时间反演破缺，super chirality 是 P, T, PT 全部破坏的最一般手性状态。

1 报告人的背景与报告风格

Sang-Wook Cheong 主要是实验凝聚态物理和材料物理学家，而不是传统意义上的纯理论家。他的代表性领域包括 multiferroics、magnetoelectric materials、complex oxides、chiral magnetism、ferro-rotational order、toroidal order 与 nonreciprocal responses。早期多铁工作强调磁螺旋、磁挫折与铁电极化之间的关系；近年的报告则更进一步，把不同低对称性响应压缩成 P, T, PT 语言。

这类报告的风格不是先写 microscopic Hamiltonian，再逐项求响应函数，而是先寻找 order parameter、外场与实验几何之间的 symmetry operational similarity。换句话说，一个效应能否出现，第一步不一定是计算，而是判断某个响应项在所有保留对称性下是否可以作为标量不变量存在。Hall effect、Edelstein effect、circular dichroism、nonreciprocal directional dichroism、magnetoelectric response、chiral phonons 与 time-chiral phonons 都可以放进这个框架。

2 P, T, PT 为什么在磁性里面有用

空间反演 P 和时间反演 T 的基本定义是

$$P: \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}, \quad T: t \rightarrow -t.$$

对磁性材料来说， T 不是抽象符号，因为自旋、磁矩、角动量都是 T -odd； P 也不是抽象符号，因为它决定 polar、chiral、ferroelectric、toroidal 与 ferro-rotational 结构是否允许。先把最基本的变换性质列出来：

物理量	类型	P	T
\mathbf{r}	polar vector	-	+
\mathbf{k}, \mathbf{p}	momentum / wave vector	-	-
\mathbf{E}, \mathbf{P}	electric field / polarization	-	+
\mathbf{J}	current	-	-
$\mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{L}$	axial vector	+	-

最重要的是动量的变换:

$$P: \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}, \quad T: \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}, \quad PT: \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}.$$

因此 PT 与单独 P 、 T 有本质差别。 P 或 T 都会把动量空间的 \mathbf{k} 点送到 $-\mathbf{k}$ ，而 PT 把一个 \mathbf{k} 点留在原处。若对自旋 1/2 电子存在反么正 PT ，并且满足类似 Kramers 的条件，则常常可以保护每个 \mathbf{k} 点的双重简并。相反，broken PT 允许在零净磁矩材料中出现自旋劈裂，这正是 altermagnetism 的关键。

P, T, PT 是粗筛，不是装饰

在磁性材料中，比“有没有净磁化”更深的问题是： T 、 PT 、 $T\tau$ 、 TC_2 、 $PT\tau$ 等组合操作是否仍然是对称性。它们决定能带是否简并、Berry 曲率是否抵消、Hall 或 magnetoelectric 响应是否被强制为零。

3 Cheong 的 chirality trinity

普通 chirality 不是简单 inversion breaking，而是 true parity breaking。也就是说，一个对象与其镜像不能通过 proper rotation 和 translation 重合。普通极性矢量 \mathbf{P} 会破坏反演，但不一定是 chiral；同理，铁电体不等于手性晶体。

Cheong 在报告中把三种最小 two-vector 标量作为 chirality trinity 的核心模型：

$$\begin{aligned} C &\sim \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}, \\ T_C &\sim \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}, \\ C' &\sim \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \end{aligned}$$

先看 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{k}$ 。磁场 \mathbf{H} 是 axial vector，在 P 下不变、在 T 下变号；波矢 \mathbf{k} 在 P 与 T 下都变号。因此

$$\begin{aligned} P: \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} &\rightarrow -\mathbf{H} \cdot \mathbf{k}, \\ T: \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} &\rightarrow +\mathbf{H} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{k}$ 是 P -odd、 T -even、 PT -odd 的 pseudoscalar，它对应 ordinary chirality。

再看 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ 。电场 \mathbf{E} 是 polar vector, 在 P 下变号、在 T 下不变, 于是

$$P : \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \rightarrow +\mathbf{k} \cdot \mathbf{E},$$

$$T : \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}.$$

所以 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ 是 P -even、 T -odd、 PT -odd 的标量, 它对应 time chirality。

最后看 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$:

$$P : \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E} \cdot \mathbf{H},$$

$$T : \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}.$$

它是 P -odd、 T -odd、 PT -even, 对应 chirality prime, 也就是带有时间反演破缺的磁电式手性。

概念	最小标量	P	T	PT
chirality C	$\mathbf{H} \cdot \mathbf{k}$	-	+	-
time chirality T_C	$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$	+	-	-
chirality prime C'	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$	-	-	+
super chirality	C, T_C, C' all active	-	-	-

Super chirality

Super chirality 表示 P, T, PT 全部破坏。它不是单纯“手性加磁性”, 而是 ordinary chirality、time chirality 与 chirality prime 同时活跃的最一般低对称状态, 因此允许最丰富的非互易光学、输运与磁电响应。

4 为什么 ferromagnets are not time chirality

铁磁体有磁化 \mathbf{M} , 时间反演下

$$T : \mathbf{M} \rightarrow -\mathbf{M}.$$

所以铁磁体确实破坏 T 。但是 Cheong 所说的 time chirality 比 ordinary T breaking 更强。这里最好的类比是

$$\mathbf{P} \neq \text{spatial chirality},$$

$$\mathbf{M} \neq \text{time chirality}.$$

铁电极化 \mathbf{P} 只是一个 polar vector, 它破坏反演, 但不一定让系统成为真正的空间手性。类似地, 铁磁磁化 \mathbf{M} 只是一个 time-odd axial vector, 它破坏时间反演, 但不一定构成真正的 temporal handedness。

Time chirality 要求“正放电影”和“倒放电影”不是同一个过程，并且不能通过其他允许的空间操作、自旋操作或畴变换恢复。因此

T -breaking is necessary but not sufficient for time chirality.

这句话的物理意思是：铁磁体有时间反演破缺，但它只是一个磁畴变量 $M \leftrightarrow -M$ ；time chirality 要求动态过程本身具有倒放后不可等价的手性结构。

5 Time chirality, true time-reversal breaking 与 temporal nonreciprocity

Cheong 的新视角是把 chirality 的逻辑搬到时间方向。普通 chirality 是 left-handed 与 right-handed 不能通过空间 proper rotations 等价；time chirality 则是 forward-time 与 backward-time process 不能由允许操作等价。

time chirality \neq ordinary magnetism,
time chirality = true time-reversal breaking,
time chirality \Rightarrow temporal nonreciprocity.

Temporal nonreciprocity 不是热力学熵增意义上的 arrow of time，而是材料响应意义上的时间正反不等价：

$$R(t_1 \rightarrow t_2) \neq R(-t_1 \rightarrow -t_2),$$

并且这种不等价在所有允许的空间、时间、畴与自旋操作之后仍然不能被消去。这个概念让人从“是否有磁矩”转向“动态过程是否具有时间手性”。

6 三重积与 toroidal invariants

报告里反复出现的结构是三重积

$$I = (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{V}_3.$$

它表示三个向量构成的有向体积，因此天然适合描述 handedness。只要知道 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ 在 P, T 下的奇偶性，就可以判断这个不变量能否出现在自由能或响应函数中。

6.1 Magnetic toroidal moment

Magnetic toroidal moment 定义为

$$\mathbf{T} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{m}_i.$$

其中 \mathbf{r}_i 是 polar、 T -even, \mathbf{m}_i 是 axial、 T -odd, 所以

$$\mathbf{T}: P\text{-odd}, T\text{-odd}, PT\text{-even}.$$

这正是线性磁电效应所需的对称性。典型不变量可以写作

$$F_{\text{ME}} \sim \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

因此 magnetic toroidal order 自然与 magnetoelectric response、directional nonreciprocity、magneto-chiral response 等联系在一起。

6.2 Electric toroidal / ferro-rotational moment

Electric toroidal 或 ferro-rotational moment 可以写作

$$\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i,$$

其中 \mathbf{p}_i 是局域电偶极矩。因为 \mathbf{r}_i 与 \mathbf{p}_i 都是 polar、 T -even, 所以 \mathbf{A} 是 axial、 T -even:

$$\mathbf{A}: P\text{-even}, T\text{-even}.$$

因此 \mathbf{A} 不是 magnetic toroidal moment。它可以在保留 P 和 T 的情况下存在, 却破坏某些镜面或二重旋转, 并产生 ferro-rotational domains。典型电环矩不变量为

$$F_A \sim (\mathbf{H} \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{A},$$

$$F_A \sim (\mathbf{E} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{A}.$$

这解释了为什么 electric toroidal invariance 可以生成 distinct transverse electromagnetic responses: 横向响应不一定来自 magnetic toroidal order, 也不一定要求 P, T 单独破坏; ferro-rotational axial order 本身就能提供横向方向选择。

7 报告中的具体例子

7.1 BiFeO₃ 的 switchable ferroelectric diode

Cheong 组的经典工作是 BiFeO₃ 中的可翻转铁电二极管与光伏效应。铁电极化 \mathbf{P} 是 polar vector:

$$P : \mathbf{P} \rightarrow -\mathbf{P}.$$

当铁电极化翻转，二极管整流方向也翻转：

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \uparrow &\Rightarrow I(V) \text{ rectifies one way,} \\ \mathbf{P} \downarrow &\Rightarrow I(V) \text{ rectifies the opposite way.} \end{aligned}$$

这体现了 polar order 对非互易电运输的控制。这里的核心不是普通 $p-n$ 结，而是铁电极化改变内部势垒、界面势垒与空间电荷分布，从而让 $+V$ 与 $-V$ 不等价。

7.2 NiTiO₃ 的 ferro-rotational domains

NiTiO₃ 的高对称结构可视为 corundum-type，对应

$$R\bar{3}c, \quad \text{point group } \bar{3}m.$$

Ferro-rotational order 之后，对称性降低为

$$R\bar{3}c (\bar{3}m) \longrightarrow R\bar{3} (\bar{3}).$$

这一步破坏的是包含 c 轴的 mirror planes、面内二重旋转以及相关 glide 操作；保留的是 P 、 T 与 C_{3z} 。两个 ferro-rotational domains 是

$$+A_z, \quad -A_z,$$

对应 clockwise 与 counterclockwise rotation。它们体现 planar chirality 或 ferro-axial/electric-toroidal order，但不是普通 ferroelectric，也不是 ordinary magnetism。

7.3 Electric toroidal invariance 与 transverse responses

报告中提到的工作“Electric toroidal invariance generates distinct transverse electromagnetic responses”的核心思想是：ferro-rotational/electric toroidal order \mathbf{A} 可以在不破坏 P, T 的情况下产生新的 transverse electromagnetic responses。与 magnetic toroidal invariance 不同，这类响应的对称性来自 P -even、 T -even 的 axial order，而不是 P -odd、 T -odd 的 magnetic toroidal moment。

如果 $\mathbf{A} = A_z \hat{z}$ ，则类似

$$(\mathbf{H} \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{A}$$

这样的不变量要求纵向外场诱导横向磁化成分。这就是所谓 Hall-like 但并非普通 Hall 的 transverse response。

7.4 Circular dichroism、c-NDD、r-CD 与 t-CD

Circular dichroism 比较左右圆偏振吸收:

$$\Delta\alpha(\mathbf{k}) = \alpha_+(\mathbf{k}) - \alpha_-(\mathbf{k}).$$

光子 helicity 可以写作

$$\lambda_\gamma \sim \mathbf{S}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{k}}.$$

在 P 下 helicity 变号, 在 T 下 helicity 不变。因此普通 reciprocal CD 检测 ordinary chirality; c-NDD 检测 circular nonreciprocal directional dichroism, 也就是正反传播方向和圆偏振相关的吸收差; t-CD 则与 time chirality、true T breaking 和 temporal nonreciprocity 有关。

效应	比较对象	主要对称性内容	物理含义
r-CD	L/R	P -odd, T -even	ordinary chirality
c-NDD	$+\mathbf{k}/-\mathbf{k}$ with helicity	nonreciprocal propagation	directional dichroism
t-CD	L/R sensitive to time chirality	P -even, T -odd	temporal handedness

8 Chiral phonons 与 time-chiral phonons

Chiral phonon 是圆偏振或椭圆偏振的声子模式, 原子做 clockwise/counterclockwise motion。声子角动量可以写作

$$\mathbf{L}_{\text{ph}} \sim \sum_{\kappa} \mathbf{u}_{\kappa} \times \dot{\mathbf{u}}_{\kappa}.$$

传播声子的 helicity-like chirality 是

$$\chi_{\text{ph}} \sim \mathbf{L}_{\text{ph}} \cdot \mathbf{k}.$$

因为 \mathbf{L}_{ph} 是 axial 且 T -odd, \mathbf{k} 是 polar 且 T -odd, 所以

$$P : \chi_{\text{ph}} \rightarrow -\chi_{\text{ph}}, \quad T : \chi_{\text{ph}} \rightarrow +\chi_{\text{ph}}.$$

因此 ordinary chiral phonon 是 P -odd、 T -even, 不等于 time-chiral phonon。Time-chiral phonon 应具有 P -even、 T -odd 的 temporal handedness, 可以类比

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}.$$

重点不是普通圆偏振, 而是倒放后不可等价的 phonon dynamics。也就是说, 普通 chiral phonon 关心“原子绕哪边转”; time-chiral phonon 关心“振动过程倒放以后是否仍可等价”。

9 Hall、Edelstein 与 magnetoelectric effect 的 P, T, PT 判据

9.1 Hall effect

Hall 响应可以写成

$$\mathbf{J}_H = \boldsymbol{\sigma}_H \times \mathbf{E}.$$

因为 \mathbf{J}_H 是 polar、 T -odd, \mathbf{E} 是 polar、 T -even, 所以 $\boldsymbol{\sigma}_H$ 必须像 axial、time-odd vector, 也就是与 \mathbf{M} 的对称性相同。普通 anomalous Hall effect 需要 T breaking; 但是在反铁磁中还必须检查是否存在 PT 或其他 combined symmetry 抵消 Berry curvature。

9.2 Edelstein effect

Edelstein effect 或 current-induced magnetization 写作

$$M_i = \chi_{ij} J_j.$$

由于 \mathbf{J} 是 P -odd、 T -odd, 而 \mathbf{M} 是 P -even、 T -odd, 所以 χ_{ij} 必须是 P -odd、 T -even。因此 Edelstein effect 需要 inversion breaking、chirality 或 spin-orbit texture。

9.3 Linear magnetoelectric effect

线性磁电效应写作

$$M_i = \alpha_{ij} E_j, \quad P_i = \alpha_{ji} H_j.$$

由于 \mathbf{M} 是 P -even、 T -odd, 而 \mathbf{E} 是 P -odd、 T -even, α_{ij} 必须是 P -odd、 T -odd。因此线性磁电效应要求单独 P 与 T 都破坏, 但 PT 可以保留。经典例子是 Cr_2O_3 。

10 空间群、磁空间群与 spin group

Cheong 的 P, T, PT 语言是粗粒度的第一筛选器。若要真正用于材料, 需要进一步和空间群、磁空间群与 spin group 结合。

10.1 空间群

普通空间群元素写作

$$g = \{R|t\}.$$

它只描述晶格和原子位置的空间对称性, 能判断 polar、chiral、ferro-rotational、SHG、压电等结构性响应。例如, 若空间群包含反演, 则普通铁电极化被禁止; 若包含镜面类 improper operations, 则 true chirality 被禁止。

10.2 磁空间群

磁空间群元素包括

$$\{R|\mathbf{t}\}, \quad T\{R|\mathbf{t}\}.$$

它描述晶体结构加磁矩排布，能判断 T 、 PT 、 $T\tau$ 、 TC_2 、 $PT\tau$ 等组合操作是否存在，从而判断 anomalous Hall effect、MOKE、magnetoelectric response、Kramers-like degeneracy 与 magnetic domains。

10.3 Spin group / spin space group

在弱 SOC 或无 SOC 极限，自旋空间旋转与真实空间旋转可以部分解耦。Spin group 元素可写作

$$[R_s \parallel \{R|\mathbf{t}\}],$$

其中 R_s 是自旋空间操作， $\{R|\mathbf{t}\}$ 是真实空间操作。Spin group 比磁空间群更细，可以判断 nonrelativistic spin splitting、altermagnetism、隐藏简并以及 SOC 打开后的对称性降低。简单说，磁空间群适合 SOC 锁定；spin group 适合 spin 与 lattice 尚未完全锁定。

框架	操作	对象	能诊断什么
space group	$\{R \mathbf{t}\}$	lattice	polar/chiral/ferro-rotational structure
magnetic space group	$\{R \mathbf{t}\}, T\{R \mathbf{t}\}$	magnetic crystal	AHE, ME, MOKE, PT degeneracy
spin group	$[R_s \parallel \{R \mathbf{t}\}]$	spin-lattice structure	altermagnetism, hidden degeneracy, SOC path

11 为什么这套语言有用

P, T, PT 是磁性响应的 coarse-grained symmetry filter。它不替代 microscopic calculation，但在计算之前判断哪些响应严格为零，哪些响应允许非零。具体来说，它可以判断：

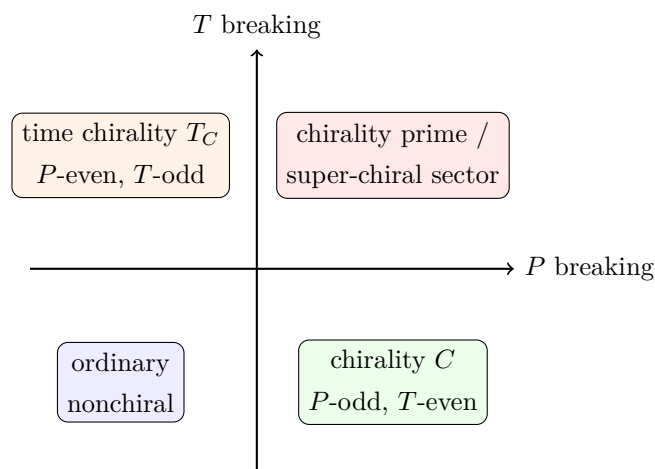
1. 是否允许 spin splitting。
2. 是否允许 anomalous Hall effect。
3. 是否允许 magnetoelectric effect。
4. 是否允许 Edelstein effect 或 current-induced magnetization。
5. 是否允许 circular dichroism、magnetic circular dichroism、NDD 与 t-CD。
6. 是否允许 nonreciprocal directional propagation。
7. 哪些 domains 能被哪些实验区分。

8. 一个零净磁矩磁体是 ordinary AFM 还是 altermagnet。
9. 一个 ferro-rotational domain 是否能产生横向响应。
10. chiral phonon 和 time-chiral phonon 的差别。

最终总结

P, T, PT are not abstract labels; they are selection rules for magnetic, optical, transport, and phononic response.

Cheong 的报告不是给出一个具体哈密顿量，而是在建立一张低对称性量子材料的响应地图。普通 chirality 是空间的左右手，time chirality 是时间正放与倒放的不等价，chirality prime 是磁电式的空间手性加时间反演破缺，super chirality 是 P, T, PT 全部破坏的最一般手性状态。



从 P, T, PT 的奇偶性出发，先判断响应是否允许，再进入微观模型。

参考文献

- [1] S.-W. Cheong and M. Mostovoy, “Multiferroics: a magnetic twist for ferroelectricity,” *Nature Materials* **6**, 13–20 (2007).
- [2] T. Choi, S. Lee, Y. J. Choi, V. Kiryukhin, and S.-W. Cheong, “Switchable ferroelectric diode and photovoltaic effect in BiFeO_3 ,” *Science* **324**, 63–66 (2009).
- [3] N. A. Spaldin, M. Fiebig, and M. Mostovoy, “The toroidal moment in condensed-matter physics and its relation to the magnetoelectric effect,” *Journal of Physics: Condensed Matter* **20**, 434203 (2008).
- [4] N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong, “Anomalous Hall effect,” *Reviews of Modern Physics* **82**, 1539–1592 (2010).
- [5] S.-W. Cheong, “Magnetic chirality,” *npj Quantum Materials* **7**, 40 (2022).
- [6] F.-T. Huang and S.-W. Cheong, “The Chirality Trinity: Chirality, Chirality Prime and Time Chirality,” *arXiv:2507.14168* (2025).

- [7] K. Du, D. Jo, X. Xu, F.-T. Huang, M.-H. Lee, M.-W. Chu, K. Wang, D. Vanderbilt, H.-W. Lee, and S.-W. Cheong, “Electric toroidal invariance generates distinct transverse electromagnetic responses,” *Nature Physics* **22**, 61–67 (2026).
- [8] S.-W. Cheong, “Altermagnetism classification,” *npj Quantum Materials* (2025).
- [9] L. Šmejkal, J. Sinova, and T. Jungwirth, “Beyond conventional ferromagnetism and antiferromagnetism: a phase with nonrelativistic spin and crystal rotation symmetry,” *Physical Review X* **12**, 040501 (2022).
- [10] P. Liu, J. Li, J. Han, X. Wan, and Q. Liu, “Spin-group symmetry in magnetic materials with negligible spin-orbit coupling,” *Physical Review X* **12**, 021016 (2022).