

Fractonic Fractional Quantum Hall Effect

从 Kane coupled wires 到 fractonic anyons 的报告笔记

报告听记整理

2026 年 6 月 27 日

摘要

这份笔记重建一次关于 *Fractonic Fractional Quantum Hall Effect* 的报告逻辑。核心观点是：这不是简单地问“拓扑能不能离开晶体”，而是问一种真正具有 Hall 响应、手征边界态、分数电荷和任意子统计的 fractional quantum Hall 型拓扑序，能否在非周期、非晶或者结构无序的几何中实现，并且能否自然产生 fractonic mobility constraint。技术主线来自 Kane–Mukhopadhyay–Lubensky 的 coupled-wire FQH 构造与 Haldane 的 null-vector gapping criterion。新工作把不同 Laughlin fractions $1/m_j$ 逐段 glue 在一起，使得普通 FQH anyon 的二维运动被整数匹配条件限制，从而分裂为 lineon、spread lineon 和 fully mobile C-anyon。

目录

1 报告真正想问的问题	2
2 Kane coupled-wire construction: 为什么一堆 wire 可以变成 FQH ?	3
2.1 Kane 的动机	3
2.2 磁场导致 Fermi points 错位	3
2.3 $\nu = 1$: 单电子 tunneling gap 掉 bulk	4
3 $\nu = 1/3$ Laughlin state 的 coupled-wire 推导	5
3.1 玻色化约定	5
3.2 为什么 $\nu = 1/3$ 需要三电子过程	6
3.3 复合手征场与 $K = 3$ 边界	6
4 Haldane null-vector criterion: 哪些 edge 可以被 glue ?	7
4.1 关于 Haldane 1997 的澄清	7
4.2 K -matrix edge theory	7
5 把不同 Laughlin fractions glue 在一起	7
5.1 从 uniform Kane array 到 non-uniform gluing	7
5.2 两个 Laughlin states 的 interface	8
5.3 gluing 的任意子凝聚解释	9

1 报告真正想问的问题	2
6 fractonic mobility 如何出现？	9
6.1 普通 Laughlin anyon 与非均匀 gluing 的差别	9
6.2 lineon	10
6.3 spread lineon 或 s-lineon	10
6.4 C-anyon	10
6.5 为什么这不是手加的 fracton 约束？	11
7 structural disorder 与 amorphous topology	11
8 整场报告的主线压缩	12
9 Questions I should ask after the talk	12
10 一个最小公式字典	13

1 报告真正想问的问题

报告一开始容易让人误解成一个很宽泛的问题：

Can topology exist without crystals?

但这个问题本身已经有许多肯定答案。比如 toric code 有 intrinsic topological order，但它不是 Hall phase；moiré fractional Chern insulator 可以实现 FQH-like fractionalization，但它仍然依赖 moiré superlattice 和 Bloch Chern band；quasicrystal 也可以有拓扑不变量，但许多情形更接近 single-particle topology、SPT 或 topological pump，而不是真正的 intrinsic fractional quantum Hall topological order。

因此报告真正想问的是更窄也更尖锐的问题：

Can a non-crystalline or amorphous system realize a genuine FQH-type phase?

Can such a phase naturally produce fractonic mobility constraints?

这句话有两层含义。第一，系统没有平移对称性，没有好动量 \mathbf{k} ，没有 Brillouin zone，也就没有普通晶体能带中的 Berry curvature integral：

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} \Omega(\mathbf{k}) d^2k. \quad (1)$$

第二，即便没有 Bloch band，仍希望保留 FQH 的核心物理：bulk gap、量子化 Hall response、手征边界态、分数电荷、分数统计和拓扑简并。换句话说，报告讨论的不是一般意义上的“无晶格拓扑”，而是 non-crystalline fractional quantum Hall topological order。

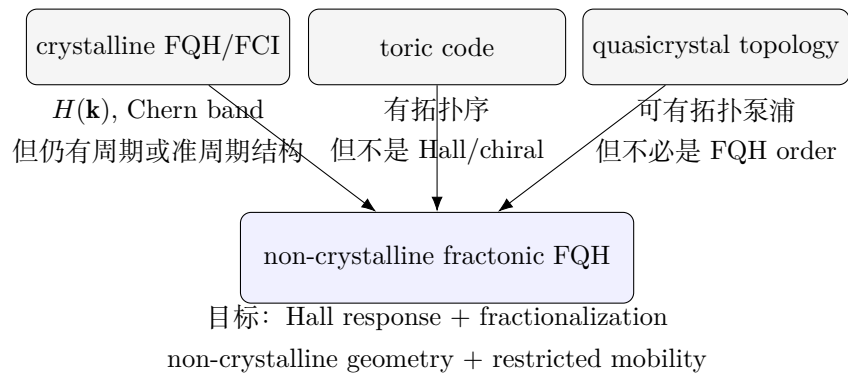


图 1: 报告的目标不是一般的无晶格拓扑, 而是非晶几何中的 FQH 型分数拓扑序, 并进一步产生 fractonic mobility constraint.

2 Kane coupled-wire construction: 为什么一堆 wire 可以变成 FQH ?

2.1 Kane 的动机

Kane–Mukhopadhyay–Lubensky 的 2002 年文章 *Fractional Quantum Hall Effect in an Array of Quantum Wires* 的核心动机是: 用一维 Luttinger liquids 和 bosonization 来构造二维 FQH。它不是说真实的 FQH 液体必须由很多根导线组成, 而是把二维问题离散化为许多可控的一维低能通道。

在 Landau gauge 下, 二维电子气的最低 Landau level 波函数可以写成沿 x 方向的平面波乘以沿 y 方向局域的波包:

$$\psi_k(x, y) \sim e^{ikx} f(y - k\ell_B^2). \quad (2)$$

这里 k 同时标记 x 动量和 y 方向 guiding center:

$$y_0 = k\ell_B^2. \quad (3)$$

因此, Landau gauge 已经暗示了一种“一维通道”图像: 不同的 guiding centers 像一排沿 x 方向延伸的 channels。Kane 的 wire array 就是把这些 channels 离散化:

$$y_j = ja. \quad (4)$$

Kane 构造的直觉是:

二维 Landau-level 问题 \rightarrow 许多一维 guiding-center channels

然后用相互作用和 inter-wire tunneling 把 bulk gap 掉, 留下手征边界态。

2.2 磁场导致 Fermi points 错位

考虑许多根沿 x 方向的 wires, 编号为 j , 相邻间距为 a , 垂直磁场为 B 。取 Landau gauge 后, 每根 wire 的右动和左动 Fermi points 发生位置依赖的平移:

$$k_{R,j} = +k_F + jb, \quad k_{L,j} = -k_F + jb, \quad b = \frac{eBa}{\hbar}. \quad (5)$$

二维 filling factor 可以写成

$$\nu = \frac{2k_F}{b}. \quad (6)$$

这条公式的物理意思是： $2k_F$ 度量每根 wire 的一维电子密度，而 b 度量磁场在相邻 wires 间产生的 momentum mismatch。commensurability 条件决定了哪些 inter-wire processes 在低能下不快速振荡。

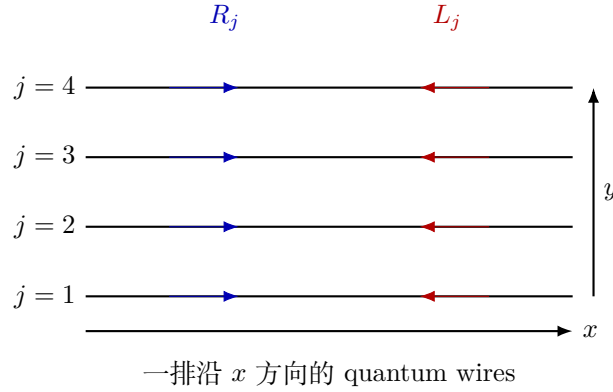


图 2: Kane coupled-wire construction 的实空间图像。每根 wire 是一个一维 Luttinger liquid。

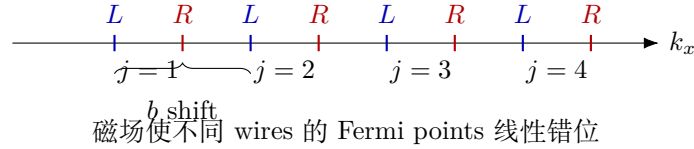


图 3: 磁场在 Landau gauge 中表现为相邻 wires 的 Fermi momentum shift。

2.3 $\nu = 1$: 单电子 tunneling gap 掉 bulk

先看 integer quantum Hall 的 coupled-wire 图像。单电子 tunneling 项可以写成

$$R_j^\dagger L_{j+1} + \text{h.c.} \quad (7)$$

它携带的快速相位来自 Fermi points:

$$e^{-i(k_F + jb)x} e^{i(-k_F + (j+1)b)x} = e^{i(b - 2k_F)x}. \quad (8)$$

因此只有当

$$b = 2k_F \quad (9)$$

时, 这个 tunneling 不快速振荡。由式 (6) 可知, 这正是

$$\nu = 1. \quad (10)$$

这时相邻 wires 的反向传播模式两两配对:

$$R_1 \leftrightarrow L_2, \quad R_2 \leftrightarrow L_3, \quad R_3 \leftrightarrow L_4, \quad \dots \quad (11)$$

bulk 中所有 counter-propagating modes 都被 gap 掉, 只剩下最左边的 L_1 和最右边的 R_N 。这就是 integer QH 的核心结构:

bulk gapped + unpaired chiral edge modes = quantum Hall phase

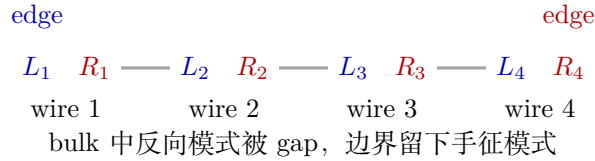


图 4: $\nu = 1$ 的 inter-wire gapping pattern。

3 $\nu = 1/3$ Laughlin state 的 coupled-wire 推导

3.1 玻色化约定

每根 wire 的低能电子场写成右动和左动两部分:

$$\Psi_j(x) = e^{i(k_F + jb)x} R_j(x) + e^{i(-k_F + jb)x} L_j(x). \quad (12)$$

采用如下 bosonization convention:

$$R_j \sim e^{i(\theta_j + \phi_j)}, \quad L_j \sim e^{i(\theta_j - \phi_j)}. \quad (13)$$

这里 ϕ_j 与 density fluctuation 有关, θ_j 是共轭相位。粗略地说,

$$\rho_j \sim \frac{1}{\pi} \partial_x \phi_j. \quad (14)$$

3.2 为什么 $\nu = 1/3$ 需要三电子过程

当 $\nu = 1/3$ 时, 由式 (6) 得

$$b = 6k_F. \quad (15)$$

单电子 hopping $R_j^\dagger L_{j+1}$ 的快速相位为

$$e^{i(b-2k_F)x} = e^{i4k_Fx}, \quad (16)$$

因此在低能长波极限下会被平均掉。也就是说, 单电子 tunneling 不能直接打开 Laughlin bulk gap。

关键在于相互作用可以产生多电子过程。对 $\nu = 1/3$, 最重要的局域过程是

$$\mathcal{O}_j = \left(R_j^\dagger L_{j+1} \right) \left(R_j^\dagger L_j \right) \left(R_{j+1}^\dagger L_{j+1} \right) + \text{h.c.} \quad (17)$$

这个过程可以读成:

$$\text{one inter-wire tunneling} + \text{two intra-wire backscatterings.} \quad (18)$$

三个因子的快速相位相乘为

$$e^{i(b-2k_F)x} e^{-i2k_Fx} e^{-i2k_Fx} = e^{i(b-6k_F)x}. \quad (19)$$

因此在 $b = 6k_F$, 也就是 $\nu = 1/3$ 时, 这个三电子过程不振荡, 成为低能允许项。

3.3 复合手征场与 $K = 3$ 边界

将式 (17) 玻色化, 可以把相互作用写成一个 cosine pinning term。引入复合手征场

$$\tilde{\varphi}_{R,j} = \theta_j + 3\phi_j, \quad \tilde{\varphi}_{L,j} = \theta_j - 3\phi_j. \quad (20)$$

则 $\nu = 1/3$ Laughlin gapping interaction 可写成

$$H_{\text{gap}} = - \sum_j g_j \cos(\tilde{\varphi}_{L,j+1} - \tilde{\varphi}_{R,j}). \quad (21)$$

这说明第 j 根 wire 的右动复合模式 $\tilde{\varphi}_{R,j}$ 与第 $j+1$ 根 wire 的左动复合模式 $\tilde{\varphi}_{L,j+1}$ 被 pin 在一起。所有 bulk modes 都被这样两两 gap 掉, 只有最外侧两个 edge modes 留下。

由于复合手征场中出现系数 3, 边界 theory 是 $K = 3$ 的 chiral Luttinger liquid。因此

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{3h}, \quad e^* = \frac{e}{3}, \quad \theta_{\text{stat}} = \frac{\pi}{3}. \quad (22)$$

$\nu = 1/3$ 的本质不是单电子 hopping, 而是 interaction-generated multi-electron tunneling。它把裸电子模式重组为 $K = 3$ 的复合手征模式, 从而得到 Laughlin fractionalization。

4 Haldane null-vector criterion: 哪些 edge 可以被 glue?

4.1 关于 Haldane 1997 的澄清

报告中提到“Haldane 1997”时，需要小心。对 gluing Abelian quantum Hall edges 最核心的文献通常是 Haldane 1995 年的文章 *Stability of Chiral Luttinger Liquids and Abelian Quantum Hall States*。这篇文章给出了 Abelian QH edge 或界面能否被相互作用稳定 gap 掉的判据，后来常被称为 Haldane null-vector criterion。

如果报告中确实说的是 1997 年，可能指与特定边缘理论有关的后续工作；但对于本报告中的“不同 $1/m$ Laughlin edge 如何 glue”，真正起作用的是 Haldane 的 null-vector gapping idea。

4.2 K -matrix edge theory

Abelian FQH edge 可以写成 K -matrix 形式：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} K_{IJ} \partial_t \phi_I \partial_x \phi_J - \frac{1}{4\pi} V_{IJ} \partial_x \phi_I \partial_x \phi_J. \quad (23)$$

局域相互作用项一般写成

$$H_{\text{int}} = - \sum_a g_a \cos(\ell_a^T \phi). \quad (24)$$

这些 cosine 项能否同时 pin 住不是显然的。若两个 cosine 的 arguments 不对易，那么 pin 住一个会强烈涨落另一个，无法同时最小化。Haldane null-vector criterion 要求

$$\ell_a^T K^{-1} \ell_b = 0. \quad (25)$$

这个条件的物理意义是：被凝聚的任意子复合体必须彼此互为 bosonic，或者说它们的 mutual statistics 平凡。这样对应的 cosine pinning terms 才能同时打开 gap。

$\text{null-vector condition } \ell_a^T K^{-1} \ell_b = 0$

保证不同 cosine pinning terms 彼此兼容，因此可以真正 gap 掉界面。

5 把不同 Laughlin fractions glue 在一起

5.1 从 uniform Kane array 到 non-uniform gluing

普通 Kane construction 中，每个 link 对应同一个 Laughlin fraction，例如每一段都是

$$\nu = \frac{1}{3}. \quad (26)$$

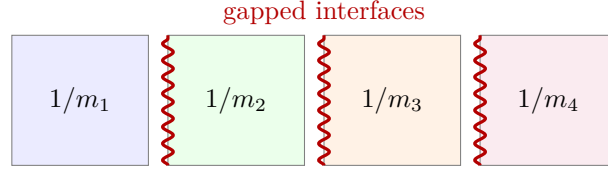
今天报告的关键创新是：允许相邻 quasiwires 或 strips 具有不同的 fractionalization：

$$\nu_j = \frac{1}{m_j}. \quad (27)$$

也就是说，系统被看成一串不同的 Laughlin strips:

$$\frac{1}{m_1}, \quad \frac{1}{m_2}, \quad \frac{1}{m_3}, \quad \dots \quad (28)$$

然后尝试用局域相互作用把相邻 strips 的 counter-propagating edge modes glue 在一起。



不同 Laughlin strips 通过 null-vector cosine terms 被 glue

图 5: 不同 $1/m_j$ Laughlin strips 的 gluing 图像。

5.2 两个 Laughlin states 的 interface

考虑两个相邻区域:

$$\nu_1 = \frac{1}{m_1}, \quad \nu_2 = \frac{1}{m_2}. \quad (29)$$

它们的界面上有一条右动边缘和一条左动边缘，因此 interface theory 可以写成

$$K_{\text{int}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & -m_2 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

考虑一个 candidate gluing term:

$$H_{\text{glue}} = -g \cos(a\varphi_1 + b\varphi_2). \quad (31)$$

对应的整数向量是

$$\ell = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (32)$$

对单个 cosine 而言，null condition 要求

$$\begin{aligned} \ell^T K_{\text{int}}^{-1} \ell &= (a, b) \begin{pmatrix} 1/m_1 & 0 \\ 0 & -1/m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{a^2}{m_1} - \frac{b^2}{m_2} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

因此

$$\frac{a^2}{m_1} = \frac{b^2}{m_2}. \quad (34)$$

等价地,

$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2. \quad (35)$$

这就是不同 Laughlin fractions 能否被简单 glue 的平方比条件。

两个 Laughlin states $1/m_1$ 与 $1/m_2$ 能被一个简单 null-vector term 完全 glue 的条件是

$$\frac{m_2}{m_1} = \text{a rational square}.$$

例如 $1/3$ 与 $1/12$ 可以 glue, 因为

$$\frac{12}{3} = 4 = 2^2. \quad (36)$$

但 $1/3$ 与 $1/5$ 在这个最简单构造中不能直接 glue, 因为 $5/3$ 不是一个有理数平方。

5.3 gluing 的任意子凝聚解释

式 (31) 的物理意义是: 在界面上凝聚一个复合任意子。这个复合体由左边区域的若干 quasiparticles 和右边区域的若干 quasiparticles 组成。null condition 保证这个复合体的自统计平凡, 因此可以作为 bosonic condensate 出现在局域 Hamiltonian 中。

一旦这个复合体凝聚, 界面被 gap 掉, 同时两侧的任意子类型被部分识别。这个识别不是任意的, 而是由整数 a, b 固定。正是这种整数匹配规则, 在非均匀系统中导致后面的 restricted mobility。

6 fractonic mobility 如何出现？

6.1 普通 Laughlin anyon 与非均匀 gluing 的差别

在普通均匀 Laughlin FQH 中, 基本 quasiparticle 可以在二维平面中自由移动。它的运动算符可以看成沿路径拖动一个 kink 或 vertex operator。只要 bulk 保持 gap, 任意子的路径可连续变形, 并产生拓扑 braid phase。

但在非均匀 glued system 中, 不同 quasiwires 之间的 gluing 规则不同。一个 elementary quasiparticle 想跨过某个 interface, 必须满足该 interface 的整数匹配条件。通常单个 quasiparticle 不满足条件, 所以它不能随意跨 wire 移动。

于是, 原本二维可动的 FQH anyon 被拆分为三类激发。

6.2 lineon

lineon 是最基本的 kink 或 elementary quasiparticle。它局域在某个 quasiwire 或某个 glued strip 的边界结构上。它可以沿 wire 方向移动：

$$x\text{-direction: allowed.} \quad (37)$$

但是它不能单独跨过相邻 wires：

$$y\text{-direction: forbidden for a single lineon.} \quad (38)$$

因此它不是完全 immobile fracton，而是只能沿一条线运动的 subdimensional excitation：

$$\boxed{\text{lineon} = \text{single kink with one-dimensional mobility}}. \quad (39)$$

6.3 spread lineon 或 s-lineon

如果若干个 lineons 组成一个 composite，它可能满足某一个相邻 interface 的匹配条件，从而可以在两条相邻 quasiwires 之间来回 spread。这样的激发叫 spread lineon，简称 s-lineon。

它比 single lineon 更可动，但仍然不能在二维系统中自由移动。它的运动范围类似：

$$j - \frac{1}{2} \longleftrightarrow j + \frac{1}{2}, \quad (40)$$

也就是可以跨过一条 wire，但不能无限制穿过所有 wires。

6.4 C-anyon

C-anyon 是更大的 composite anyon。它包含足够多的 elementary kinks，使得它同时满足所有 local gluing constraints。因此它可以在整个二维系统中自由移动：

$$\boxed{\text{C-anyon} = \text{fully mobile composite anyon}}. \quad (41)$$

C-anyon 才能像普通 FQH anyon 那样进行二维 braid。lineon 与 s-lineon 的统计性质仍然存在，但它们的运动受限，因此 braiding 操作通常需要通过 mobile C-anyon 绕过它们来探测。

$$\boxed{\text{lineon} \longrightarrow \text{s-lineon} \longrightarrow \text{C-anyon}}$$

运动能力逐级增强。single kink 只能沿 wire 动；较大的 composite 可以跨局部界面；足够大的 composite 才恢复二维自由运动。

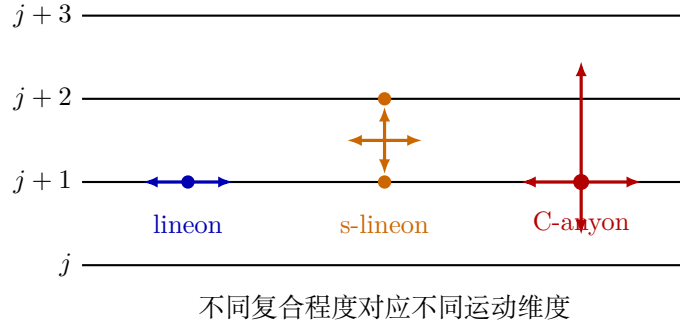


图 6: lineon、s-lineon 与 C-anyon 的运动能力示意。

6.5 为什么这不是手加的 fracton 约束？

许多 fracton 模型从高阶多极矩守恒或 subsystem symmetry 出发，例如要求电荷和偶极矩守恒，从而单个电荷不能自由移动。但这里的逻辑不同。报告中的 restricted mobility 来自三个更 microscopic 的事实：第一，电子算符必须是局域的；第二，相邻 Laughlin edges 的 gluing 必须满足 Haldane null-vector condition；第三，不同位置的 m_j 不同，使得不同 interfaces 要求不同的整数匹配条件。

因此，fractonic behavior 不是外加的，而是从 non-uniform FQH gluing 中自动冒出来：

$$\text{local electron operators} + \text{null-vector gluing} + \text{non-uniform } m_j \implies \text{restricted anyon mobility.} \quad (42)$$

7 structural disorder 与 amorphous topology

报告还提到 onsite disorder、bond disorder 与 structural disorder 的区别。这个区别很重要，因为 non-crystalline FQH 并不是普通 Anderson disorder 问题。

一般 tight-binding Hamiltonian 可写成

$$H = \sum_i \epsilon_i c_i^\dagger c_i + \sum_{\langle ij \rangle} t_{ij} c_i^\dagger c_j + \text{h.c.} \quad (43)$$

onsite disorder 指的是

$$\epsilon_i = \epsilon_0 + w_i, \quad (44)$$

也就是格点位置和连接图不变，只是每个 site 上的势能随机。

bond disorder 指的是

$$t_{ij} = t_0 + \delta t_{ij}, \quad (45)$$

也就是格点和连接通常仍固定，但每条 bond 的 hopping strength 随机。

structural disorder 更深，它改变的是位置和连接本身：

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^{(0)} + \delta\mathbf{r}_i, \quad (46)$$

甚至 nearest-neighbor graph 也可能改变。这样 t_{ij} 的变化不是手工加随机数，而是由实际距离、局域配位数和局域几何诱导出来：

$$t_{ij} = t(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (47)$$

onsite disorder : ϵ_i random, geometry fixed

bond disorder : t_{ij} random, graph often fixed

structural disorder : \mathbf{r}_i and/or connectivity itself random

在 fractonic FQH 构造中, 非均匀 wire positions 改变了相邻 wires 的 effective commensurability 和 gluing pattern。这更接近 structural disorder, 而不是简单的 onsite randomness。正因为 real-space geometry 本身进入了 m_j 和 gluing constraints, anyon mobility 才会被几何结构控制。

8 整场报告的主线压缩

现在可以把报告主线压缩成一条链：

$$\text{Kane coupled wires} \Rightarrow \text{FQH from bosonized 1D channels}, \quad (48)$$

$$\text{Haldane null vectors} \Rightarrow \text{which interfaces can be gapped}, \quad (49)$$

$$\text{non-uniform } 1/m_j \text{ gluing} \Rightarrow \text{position-dependent anyon matching rules}, \quad (50)$$

$$\text{locality constraints} \Rightarrow \text{lineons, s-lineons, C-anyons}. \quad (51)$$

更物理地说, Kane 证明了 FQH 可以从一维 Luttinger liquids 通过磁场导致的 momentum mismatch 和相互作用诱导的 cosine pinning 组装出来。Haldane 的 null-vector criterion 告诉我们哪些 edge couplings 可以真正 gap 掉界面。fractonic FQH 的新工作把这些工具用于非均匀几何, 把不同 Laughlin fractions $1/m_j$ glue 在一起。由于单个 quasiparticle 跨界时必须满足局域整数匹配条件, 普通二维可动 FQH anyon 被分裂成受限运动的 lineon、spread lineon 和完全可动的 C-anyon。

一句话总结：

Fractonic FQH = non-uniform Kane wire construction + Haldane gluing + restricted anyon mobility.

9 Questions I should ask after the talk

1. Is the restricted mobility stable against generic local perturbations, or is it protected only within the exactly solvable coupled-wire limit?

2. What is the precise role of charge conservation in gluing different Laughlin fractions? Does the construction require a superconducting substrate, external charge reservoir, or composite charged objects?
3. Should the resulting phase be viewed as an intrinsic two-dimensional fractonic topological order, or rather as a subsystem-symmetry-enriched/non-crystalline Hall phase?
4. Can one define a robust real-space topological invariant for this non-crystalline FQH phase, analogous to a many-body Chern number or a topological response coefficient?
5. In an experimental platform, what would distinguish a lineon from an ordinary localized anyon pinned by disorder?

10 一个最小公式字典

为了听后续报告或读文章时不迷路，可以记住下面几个公式。

$$k_{R,j} = +k_F + jb, \quad k_{L,j} = -k_F + jb, \quad b = \frac{eBa}{\hbar}, \quad (52)$$

$$\nu = \frac{2k_F}{b}. \quad (53)$$

$\nu = 1/3$ 的三电子过程：

$$\mathcal{O}_j = \left(R_j^\dagger L_{j+1} \right) \left(R_j^\dagger L_j \right) \left(R_{j+1}^\dagger L_{j+1} \right) + \text{h.c.} \quad (54)$$

复合手征场：

$$\tilde{\varphi}_{R,j} = \theta_j + 3\phi_j, \quad \tilde{\varphi}_{L,j} = \theta_j - 3\phi_j. \quad (55)$$

Laughlin gapping term：

$$H_{\text{gap}} = - \sum_j g_j \cos(\tilde{\varphi}_{L,j+1} - \tilde{\varphi}_{R,j}). \quad (56)$$

Haldane null-vector condition：

$$\ell_a^T K^{-1} \ell_b = 0. \quad (57)$$

不同 Laughlin fractions 的 gluing 条件：

$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{b}{a} \right)^2. \quad (58)$$

fractonic hierarchy：

$$\text{lineon} \longrightarrow \text{s-lineon} \longrightarrow \text{C-anyon}. \quad (59)$$

参考文献

- [1] C. L. Kane, R. Mukhopadhyay, and T. C. Lubensky, “Fractional Quantum Hall Effect in an Array of Quantum Wires,” *Physical Review Letters* **88**, 036401 (2002).
- [2] F. D. M. Haldane, “Stability of Chiral Luttinger Liquids and Abelian Quantum Hall States,” *Physical Review Letters* **74**, 2090 (1995).
- [3] J. Schirmann, P. d’Ornellas, C. Stahl, and A. G. Grushin, “Fractonic Fractional Quantum Hall Effect,” arXiv:2504.18337.
- [4] J. C. Y. Teo and C. L. Kane, “From Luttinger liquid to non-Abelian quantum Hall states,” *Physical Review B* **89**, 085101 (2014).
- [5] X.-G. Wen, “Topological orders and edge excitations in fractional quantum Hall states,” *Advances in Physics* **44**, 405–473 (1995).
- [6] A. M. Chang, “Chiral Luttinger liquids at the fractional quantum Hall edge,” *Reviews of Modern Physics* **75**, 1449–1505 (2003).