施李坤老师 CCMP 报告笔记 Driven Fermions, Baths, Floquet Steady States, and Dissipation-Shaped Quantum Geometry

现场报告整理

摘要

这份笔记整理施李坤老师在 CCMP 报告中的主要逻辑。报告的前半部分从一个基本问题出发：周期驱动下的费米子究竟如何占据 Floquet 态？答案并不由 Floquet 能谱本身唯一决定，而是由驱动、浴、Pauli blocking 共同选择。费米浴和玻色浴会导致完全不同的非平衡稳态，分别对应 Floquet Fermi liquid 与 ultracritical Floquet non-Fermi liquid。报告的后半部分转向非线性输运中的量子几何读出。线性反常 Hall 效应给出了用输运测量 Berry curvature 的历史范式，而二阶非线性响应被希望用于读出 quantum metric。然而施老师最近的工作强调：所谓 Γ^0 的 intrinsic nonlinear conductivity 并不是纯粹由 Bloch Hamiltonian 决定的量，而会被环境和耗散机制重塑。整场报告的统一思想是：远离平衡时，环境不是技术细节，而是物理本身的一部分。

目录

1 周期驱动费米子的基本问题 2

2 为什么周期驱动体系需要 bath 2

3 远离平衡时，bath 的性质很重要 4

4 2024 PRL：Floquet Fermi Liquid 4

5 2025 PRL：Ultracritical Floquet Non-Fermi Liquid 5

6 从 effective mass 到 quantum geometry 6

7 如何从实验中抽取 quantum geometry 6

8 二阶非线性电导的 Γ 层级 8

8.1 Γ^{-2}：nonlinear Drude . . . 8

8.2 Γ^{-1}：Berry curvature dipole . . . 8

8.3 Γ^{0}：intrinsic nonlinear response . . . 9

9 Dissipation-shaped quantum geometry 9

10 整场报告的概念统一性 10

11 Outlook：AI learning quantum geometry and bath 11

12 总结 12

1 周期驱动费米子的基本问题

报告一开始的问题可以压缩成一句话：

Fermions occupy what when they are driven?

在平衡态中，这个问题有标准答案。若体系和温度为 T、化学势为 μ 的热库达到平衡，费米子占据由 Fermi–Dirac 分布给出：

$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/T}+1}.$$

在低温极限，$n_F(\epsilon)$ 变成阶跃函数。于是费米面就是占据从 1 跳到 0 的动量空间边界。这个图像背后的核心前提是：体系有一个全局定义良好的能量，低能态优先被填充，高能态为空。

周期驱动体系则不同。若 Hamiltonian 满足

$$H(t+T) = H(t), \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T},$$

单粒子态可以写成 Floquet 形式：

$$|\psi_{\alpha\mathbf{k}}(t)\rangle = e^{-i\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}}t}|\phi_{\alpha\mathbf{k}}(t)\rangle, \qquad |\phi_{\alpha\mathbf{k}}(t+T)\rangle = |\phi_{\alpha\mathbf{k}}(t)\rangle.$$

这里 $\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}}$ 是 quasienergy。关键区别是 quasienergy 只在模 Ω 意义下定义：

$$\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} \equiv \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} + m\Omega, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

因此，周期驱动体系中不存在绝对的“最低 quasienergy 态”。一个 Floquet 态可以被看成吸收或放出 m 个驱动光子的 sideband。于是，简单地说“费米子填充最低能量态”已经不再成立。

周期驱动费米子的占据不是由 Floquet band structure 单独决定的，而是由驱动、浴、碰撞过程与 Pauli blocking 共同决定的非平衡动理学结果。

这个问题也是后面所有内容的起点。Floquet 理论告诉我们有哪些准能态，但并不自动告诉我们这些准能态如何被占据。要回答占据问题，必须引入环境或浴。

2 为什么周期驱动体系需要 bath

闭合量子体系的演化是幺正的。设密度矩阵为 $\rho(t)$，则

$$\rho(t) = U(t,0)\rho(0)U^\dagger(t,0).$$

对周期驱动体系，定义一个周期的 Floquet evolution operator：

$$U_F = U(T,0).$$

在 stroboscopic 时间 $t = nT$ 上，密度矩阵满足

$$\rho(nT) = U_F^n \rho(0) U_F^{-n}.$$

幺正演化不会压缩 Hilbert space 中不同初态之间的信息距离，因此一个闭合周期驱动体系一般不会自动忘记初态，也不会自然收敛到唯一稳态。即使在 Floquet 本征态基底中，很多不同的对角占据

$$\rho_{\rm diag} = \sum_\alpha p_\alpha |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|$$

都可以在 stroboscopic sense 下保持不变。闭合体系本身并不告诉我们 p_α 应该取什么。

因此需要 bath。浴可以提供三类作用：退相干、弛豫、能量移除；若是费米浴，还可以交换粒子。开放体系的动力学可以示意性写成

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H(t),\rho] + \mathcal{D}_{\rm bath}[\rho],$$

其中 $\mathcal{D}_{\rm bath}$ 表示耗散项。合适的 bath 可以使体系进入一个周期稳态：

$$\rho_{\rm ss}(t+T) = \rho_{\rm ss}(t),$$

并且对一大类初态有吸引性：

$$\rho(t) \longrightarrow \rho_{\rm ss}(t).$$

在 Floquet basis 下，若只关心占据数，可以写成 rate equation 的形式：

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \sum_\beta \left(W_{\alpha\beta} p_\beta - W_{\beta\alpha} p_\alpha\right).$$

稳态条件为

$$0 = \sum_\beta \left(W_{\alpha\beta} p_\beta - W_{\beta\alpha} p_\alpha\right).$$

这里跃迁率 $W_{\alpha\beta}$ 由 Floquet wavefunction、bath spectrum、驱动频率与 system–bath coupling 共同决定。

The bath is not a technical detail; it selects the physical Floquet occupation.

3 远离平衡时，bath 的性质很重要

在平衡态中，bath 的许多微观细节往往不重要。只要温度 T 和化学势 μ 给定，弱耦合体系会热化到 Gibbs 或 grand canonical 分布。此时 bath 的 microscopic structure 常常被压缩成少数热力学参数。

非平衡 Floquet 体系完全不同。驱动持续向系统注入能量，而 quasienergy 又只定义到模 Ω。这意味着 bath 不只是一个降温器，而是决定 Floquet sideband 如何被占据的选择器。

施老师强调的标题可以概括为：

Nature of bath matters away from equilibrium.

最重要的对比是费米浴和玻色浴。二者的区别并不是技术性的，而是物理性的。

bath 类型	交换什么	对 Floquet 稳态的作用
Fermionic bath	能量和粒子	有化学势 μ，直接给出类似费米面的填充标准
Bosonic bath	主要交换能量	作为散热器，但不直接给电子分布指定化学势

表 1: 费米浴与玻色浴在非平衡 Floquet 费米子问题中的物理差异。

费米浴像一个电子 reservoir。它有自己的化学势和 Fermi surface，因此可以直接为电子提供“填到哪里”的标准。玻色浴则更像声子、光子、magnon 或其他热环境。它可以吸收能量，使系统不至于无限加热，但它没有电子化学势，不能直接强迫电子服从 Fermi–Dirac 分布。

4 2024 PRL：Floquet Fermi Liquid

施老师前半部分首先介绍了 2024 年关于 Floquet Fermi liquid 的工作。该工作考虑周期驱动费米子弱耦合到一个理想费米浴。Floquet periodic part 可以展开为 sidebands：

$$|\phi_{\alpha\mathbf{k}}(t)\rangle = \sum_m e^{-im\Omega t}|\phi_{\alpha\mathbf{k}}^{(m)}\rangle.$$

每个 m 对应吸收或放出 m 个驱动量子的 Floquet replica。若体系耦合到有化学势 μ 的费米浴，稳态占据可以示意性写为

$$n_{\alpha\mathbf{k}} \sim \sum_m \left|\phi_{\alpha\mathbf{k}}^{(m)}\right|^2 f\left(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} + m\Omega - \mu\right).$$

这里 f 是 bath 的 Fermi distribution。这个公式的物理含义非常清楚：同一个 Floquet 态的不同 sideband 分量，会分别按照 shifted energy $\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} + m\Omega$ 去参照 bath 的化学势。

于是费米面条件变成一族方程：

$$\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} + m\Omega = \mu.$$

不同的 m 给出不同的 Floquet Fermi surface。这些费米面可以嵌套在一起，因此文章中使用了类似 matryoshka-doll 的图像。

Floquet Fermi liquid 不是平衡 Fermi liquid，因为其费米面来自 Floquet sideband 与 bath 化学势的共同作用；但它仍然是 Fermi-liquid-like，因为动量空间中仍存在清晰的占据奇异结构。

这一部分传递的关键信息是：只要 bath 是费米浴，它就能把自身的 Fermi level 结构投影到 driven system 的 Floquet replicas 上。换句话说，Floquet band structure 本身不够，费米浴通过自己的化学势选择了可观测的非平衡占据。

5 2025 PRL：Ultracritical Floquet Non-Fermi Liquid

随后施老师介绍了另一种 bath：玻色浴。周期驱动费米子耦合到玻色浴时，情况发生本质变化。玻色浴可以吸收或释放能量，但不交换电子数。因此它不能像费米浴那样直接指定一个 Fermi–Dirac 分布。

此时稳态占据需要从动理学方程决定。一个典型的形式是

$$0 = \sum_{\mathbf{k}'} \left[W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}'} (1 - n_{\mathbf{k}}) - W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} (1 - n_{\mathbf{k}'}) \right].$$

这个方程中，$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ 是由 bosonic bath 诱导的跃迁率。因子 $1 - n_{\mathbf{k}}$ 与 $1 - n_{\mathbf{k}'}$ 是 Pauli blocking 的体现。玻色浴只负责能量弛豫，而总粒子数仍由费米子体系自身约束。

这就导致一个重要结果：稳态占据一般不是 Fermi–Dirac 分布。它既不是普通平衡分布，也不是简单的热分布。驱动、粒子数守恒、Pauli blocking 与 bath spectrum 共同形成一个非平衡 steady state。

更有趣的是，这个 steady state 可以在动量空间出现尖锐非解析性。普通 Landau Fermi liquid 的零温占据在 k_F 处有跳变：

$$n_k \sim Z\Theta(k_F - k) + n_k^{\mathrm{reg}}.$$

而 ultracritical Floquet non-Fermi liquid 中的奇异性可以不是简单跳变，而可能表现为高阶导数的不连续或发散：

$$\partial_k^p n_k \quad \text{在某些} k = k_\star \text{ 处出现非解析行为}.$$

这就是为什么它被称为 non-Fermi liquid：它有类似费米面的 sharp momentum-space singularity，却没有普通 Landau quasiparticle jump。

所谓 ultracritical 的含义在于，这些非平衡奇异结构甚至可以在有限温度 bath 下保持尖锐。平衡态中，有限温度会把 Fermi–Dirac 阶跃抹平；而这里的奇异性来自非平衡动理学平衡，因此不是普通热平衡费米面。

费米浴产生 Floquet Fermi liquid，玻色浴产生 ultracritical Floquet non-Fermi liquid。相同的 driven fermion system，换一个 bath，就可能换一个非平衡相。

6 从 effective mass 到 quantum geometry

报告后半部分转向非线性输运与量子几何。施老师用一句话概括这一转变:

From effective mass to quantum geometry.

传统输运理论主要关心能带色散。Bloch 电子的群速度为

$$v_a(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar}\partial_{k_a}\varepsilon_n(\mathbf{k}).$$

有效质量张量来自能带的二阶导数:

$$\frac{1}{m^*_{ab}} \sim \partial_{k_a}\partial_{k_b}\varepsilon_n(\mathbf{k}).$$

因此传统图像可以概括为:输运测的是能量色散如何弯曲。有效质量越小,电子越容易被电场加速。

但是现代多能带体系中,Bloch 电子不仅有能量 $\varepsilon_n(\mathbf{k})$,还有周期部分波函数 $|u_{n\mathbf{k}}\rangle$。当 $\mathbf{k}$ 在 Brillouin zone 中变化时,$|u_{n\mathbf{k}}\rangle$ 也在 Hilbert space 中变化。这种变化包含在 quantum geometric tensor 中:

$$Q^n_{ab}(\mathbf{k}) = \langle\partial_{k_a}u_{n\mathbf{k}}|1 - |u_{n\mathbf{k}}\rangle\langle u_{n\mathbf{k}}||\partial_{k_b}u_{n\mathbf{k}}\rangle\,.$$

它可以分解为实部和虚部:

$$Q^n_{ab} = g^n_{ab} - \frac{i}{2}\Omega^n_{ab}.$$

其中

$$g^n_{ab} = \operatorname{Re} Q^n_{ab}, \qquad \Omega^n_{ab} = -2\operatorname{Im} Q^n_{ab}.$$

Ω_{ab} 是 Berry curvature,描述波函数在动量空间中的反对称几何结构;g_{ab} 是 quantum metric,描述相邻 Bloch 波函数之间的量子距离。若 Berry curvature 是几何的 “虚部”,那么 quantum metric 就是几何的 “实部”。

有效质量看的是 $\varepsilon_n(\mathbf{k})$ 如何弯曲;量子几何看的是 $|u_{n\mathbf{k}}\rangle$ 如何在动量空间中旋转和变形。

7 如何从实验中抽取 quantum geometry

施老师用反常 Hall 效应作为历史类比。反常 Hall 效应的理论中,Hall conductivity 通常分为 intrinsic 与 extrinsic 两部分:

$$\sigma^H_{ab} = \sigma^{\text{int}}_{ab} + \sigma^{\text{ext}}_{ab}.$$

其中 intrinsic 部分来自 Berry curvature，是 Bloch band wavefunction 的几何性质：

$$\sigma^{\text{int}}_{ab} = -\frac{e^2}{\hbar}\sum_n \int_{\mathbf{k}} f_{n\mathbf{k}}\Omega^n_{ab}(\mathbf{k}).$$

这里 $\int_{\mathbf{k}}$ 表示对 Brillouin zone 的动量积分。这个公式的深层含义是：线性 intrinsic Hall effect 可以直接读出 Berry curvature 的占据加权积分。

半经典动力学中，Berry curvature 还给出 anomalous velocity：

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon_n - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_n.$$

这说明 Berry curvature 不只是数学量，而是可以通过 Hall response 直接进入实验观测的物理量。Nagaosa 等人的 2010 年 RMP 总结了反常 Hall 效应中的 intrinsic/extrinsic 框架，Xiao–Chang–Niu 的 2010 年 RMP 则系统总结了 Berry phase 如何进入电子性质。

于是一个自然问题出现了：

如果线性 intrinsic Hall effect 可以读出 Berry curvature，那么 quantum metric 如何被实验读出？

施老师报告中的回答是：二阶非线性输运提供了读出 quantum metric 的可能路径。非线性电流可以写成

$$j_a = \sigma_{ab}E_b + \sigma^{(2)}_{abc}E_bE_c + \cdots.$$

电场不仅移动分布函数，还会引起 Bloch 态的 interband mixing。这个 mixing 由矩阵元 $\langle u_m|\partial_{k_a}u_n\rangle$ 控制。两个这样的矩阵元相乘并取实部，正是 quantum metric 的来源：

$$g^n_{ab} = \sum_{m\neq n}\mathrm{Re}\left[\langle\partial_{k_a}u_n|u_m\rangle\langle u_m|\partial_{k_b}u_n\rangle\right].$$

因此，可以形成一个漂亮的类比：

$$\text{linear intrinsic Hall} \longleftrightarrow \Omega_{ab},$$
$$\text{second-order nonlinear response} \longleftrightarrow g_{ab}\ \text{或}\ \partial_k g_{ab}.$$

不过，施老师强调这件事远比线性 Hall 更微妙。非线性 DC 响应需要建立 nonequilibrium steady state，而稳态如何建立依赖环境和耗散机制。

8 二阶非线性电导的 Γ 层级

为了区分不同物理机制，施老师把二阶电导按 relaxation rate Γ 展开。这里 Γ 可以理解为散射率或能级展宽，寿命 τ 与其关系为 $\tau \sim 1/\Gamma$。二阶电导可以写成

$$\sigma_{abc}^{(2)} = \Gamma^{-2}\sigma_{abc}^{(-2)} + \Gamma^{-1}\sigma_{abc}^{(-1)} + \Gamma^{0}\sigma_{abc}^{(0)} + \cdots .$$

不同幂次对应不同的物理来源。

标度	名称	主要物理来源	读出的信息
Γ^{-2}	nonlinear Drude	分布函数的二阶偏移	色散、有效质量、Fermi surface
Γ^{-1}	Berry curvature dipole	anomalous velocity 乘一阶非平衡分布	Berry curvature 的动量空间偶极
Γ^{0}	intrinsic nonlinear response	interband coherence 与 NESS 结构	quantum metric 以及 kinetic con

表 2: 二阶非线性电导按 Γ 的层级分类。

8.1 Γ^{-2}：nonlinear Drude

最经典的非线性响应来自 Boltzmann 分布函数的二阶偏移。外电场使分布函数偏离平衡：

$$f = f_0 + f^{(1)} + f^{(2)} + \cdots .$$

在 relaxation time approximation 中，有示意性关系

$$f^{(1)} \sim \tau E \partial_k f_0, \qquad f^{(2)} \sim \tau^2 E^2 \partial_k^2 f_0.$$

二阶 Drude 电流来自普通群速度和 $f^{(2)}$：

$$j_a^{(2)} \sim -e \int_{\mathbf{k}} v_a f^{(2)}.$$

因此这项标度为

$$\sigma^{(-2)} \sim \tau^2 \sim \Gamma^{-2}.$$

这项通常最大，但并不是量子几何信号。它主要反映能带色散、有效质量和 Fermi surface 各向异性。

8.2 Γ^{-1}：Berry curvature dipole

下一阶是 Berry curvature dipole。电场诱导一阶分布偏移 $f^{(1)}$，Berry curvature 给出 anomalous velocity。两者相乘给出二阶电流：

$$j_a^{(2)} \sim -e \int_{\mathbf{k}} v_a^{\mathrm{anom}} f^{(1)}.$$

由于 v_a^{anom} 本身线性依赖电场，而 $f^{(1)} \sim \tau E \partial_k f_0$，所以这一项满足

$$\sigma^{(-1)} \sim \Gamma^{-1}.$$

Berry curvature dipole 可以示意性写成

$$D_{ab} = \int_{\mathbf{k}} f_0 \partial_{k_a} \Omega_b.$$

这项已经是量子几何效应，但读出的是 quantum geometric tensor 的虚部，即 Berry curvature。

8.3 Γ^0：intrinsic nonlinear response

最受关注的是 Γ^0 层。因为它不随散射时间发散，所以传统上容易被称为 intrinsic。人们希望从这一项中读出 quantum metric 或 quantum metric dipole：

$$\sigma_{\mathrm{geo}}^{(0)} \sim \int_{\mathbf{k}} f_0 \partial_k g.$$

这背后的物理是，二阶电场响应包含 Bloch 波函数的 interband coherence 和 field-induced deformation，而这些效应正是由 quantum metric 控制的。

但是施老师报告的重点恰恰是：Γ^0 不等于 “纯量子几何”。即使一个响应不随 Γ 发散，也不意味着它就是只由 Bloch Hamiltonian 决定的 intrinsic quantity。

9 Dissipation-shaped quantum geometry

施老师最近的 PRL 工作题目可以概括为：

Dissipation-Shaped Quantum Geometry in Nonlinear Transport

它的核心结论是：

Intrinsic nonlinear conductivity depends on environment.

这句话乍看有些矛盾。既然叫 intrinsic，为什么还会依赖 environment？理解这一点需要回到线性反常 Hall 效应的历史经验。在那里，intrinsic Berry-curvature contribution 通常被视为 Bloch band 本身的几何性质，而 extrinsic contribution 来自 skew scattering、side jump 等杂质过程。

但是非线性 DC 响应不同。二阶响应必然把体系推离平衡；要有稳态电流，体系必须建立一个 nonequilibrium steady state。这个稳态并不是 Hamiltonian 单独决定的，而是由 Hamiltonian、外场、bath 和耗散机制共同决定的。

因此，Γ^0 nonlinear conductivity 的一般结构应该写为

$$\sigma^{(0)} = \sigma^{(0)}_{\text{geo}} + \sigma^{(0)}_{\text{kin}}.$$

其中 $\sigma^{(0)}_{\text{geo}}$ 是真正与 quantum metric 或 quantum metric dipole 相关的几何项。它可以包含类似

$$\sigma^{(0)}_{\text{geo}} \sim \partial_k g$$

的结构。而 $\sigma^{(0)}_{\text{kin}}$ 是由 NESS 分布函数和动理学过程带来的 kinetic contribution。在一些简单模型中，它可以具有类似

$$\sigma^{(0)}_{\text{kin}} \propto v^3 f_0^{(4)}$$

的形式。

这个 kinetic contribution 与 quantum metric 没有直接关系，但它和 quantum metric contribution 同样处在 Γ^0 层。因此，仅仅通过 Γ scaling 无法把它自动消掉。

> 正确说法不是 Γ^0 response 等于 quantum metric，而是 Γ^0 response 包含 quantum metric，同时也可能包含由环境决定的 kinetic contribution。

这就是施老师后半部分的关键新观点。它修正了一个过于简单的想法：

$$\Gamma^0 \Rightarrow \text{intrinsic} \Rightarrow \text{pure quantum metric}.$$

更准确的逻辑是

$$\Gamma^0 \Rightarrow \text{不随散射率发散} \not\Rightarrow \text{独立于 bath}.$$

10 整场报告的概念统一性

这场报告看似分成两个部分：前半部分讨论 Floquet 费米子和 bath，后半部分讨论 nonlinear transport 和 quantum geometry。实际上这两部分共享同一个中心思想。

前半部分的结论是：

$$\text{bath} \quad \text{determines} \quad \text{Floquet occupation and nonequilibrium phase.}$$

费米浴和玻色浴给出不同的占据规则，因此产生不同的 driven steady state。2024 PRL 和 2025 PRL 的对比说明：非平衡相不只是 Hamiltonian 的性质，也取决于 bath 的统计性质和耦合方式。

后半部分的结论是：

$$\text{bath} \quad \text{determines} \quad \text{intrinsic nonlinear response.}$$

即使在 Γ^0 层，二阶非线性电导也会被建立 NESS 的环境机制重塑。因此，量子几何的实验读出不是简单的 Hamiltonian inversion，而是 Hamiltonian 与 environment 的联合问题。

Away from equilibrium, the environment is part of the physics.

这句话贯穿整场报告。远离平衡时，环境不只是一个让体系热化的外部背景，而是选择占据、决定稳态、塑造响应、影响实验读出的核心组成部分。

11 Outlook：AI learning quantum geometry and bath

报告最后的 outlook 提到了两个问题：

$$\text{AI learning quantum geometry?}$$

以及

$$\text{AI learning complicated bath with infinite degrees of freedom?}$$

这并不是简单的 AI buzzword，而是指向一个实际的 inverse problem。非线性输运实验测到的不是 $g_{ab}(\mathbf{k})$ 或 $\Omega_{ab}(\mathbf{k})$ 本身，而是一个复杂响应张量：

$$\sigma^{(2)}_{abc} = \sigma^{(2)}_{abc}(\omega, T, \mu, \Gamma, \text{disorder}, \text{drive}, \text{contacts}, \cdots).$$

如果想从实验中反推出 quantum geometry，需要从这些响应数据中学习

$$g_{ab}(\mathbf{k}), \qquad \Omega_{ab}(\mathbf{k}), \qquad \partial_{k_c} g_{ab}(\mathbf{k}).$$

但施老师的工作说明，仅学习 Bloch geometry 还不够。因为响应还依赖 bath。真实材料中的 bath 可能包含声子、杂质、电子–电子散射、基底、接触电极、电磁环境等。它们可能表现为频率和动量依赖的 self-energy：

$$\Sigma(\omega, \mathbf{k}),$$

也可能表现为复杂的 Lindblad dissipator：

$$\mathcal{D}[\rho],$$

或者表现为动理学方程中的跃迁核：

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}.$$

真实 bath 有无限多自由度，不可能逐一显式建模。AI 或机器学习可能有用的地方，是从多维实验数据中学习一个 effective bath kernel，并同时反推出 quantum geometric information。

未来从实验中抽取 quantum geometry，很可能不是单纯学习 $g_{ab}(\mathbf{k})$，而是同时学习 band geometry 与 bath kernel 的联合 inverse problem。

若 bath 模型错误，就可能把 kinetic signal 误认为 quantum-metric signal。这个警告正是施老师最近工作的直接延伸。

12 总结

- Floquet band structure alone does not determine occupation.
- Fermionic and bosonic baths produce different driven steady states.
- Fermionic bath can generate Floquet Fermi liquid with nested Floquet Fermi surfaces.
- Bosonic bath can generate ultracritical Floquet non-Fermi liquid with sharp nonequilibrium momentum-space singularities.
- Linear intrinsic Hall effect reads Berry curvature.
- Nonlinear Γ^0 response can contain quantum metric or quantum metric dipole.
- But intrinsic nonlinear conductivity is dissipation-shaped and environment-dependent.
- Future extraction of quantum geometry may require learning the bath.

施老师报告最重要的贡献，不只是给出某个具体公式，而是改变了我们对非平衡响应中“内禀性”的理解。在平衡线性响应中，我们习惯把 intrinsic contribution 理解为 Bloch band 的性质；但在非线性非平衡响应中，稳态本身就必须由环境选择。因此，所谓 intrinsic nonlinear conductivity 不能脱离 bath 来定义。量子几何仍然是核心，但它的实验读出是被耗散塑造的。

参考文献

[1] N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong, “Anomalous Hall effect,” Rev. Mod. Phys. **82**, 1539 (2010).

[2] D. Xiao, M.-C. Chang, and Q. Niu, “Berry phase effects on electronic properties,” Rev. Mod. Phys. **82**, 1959 (2010).

[3] L.-k. Shi, O. Matsyshyn, J. C. W. Song, and I. Sodemann Villadiego, “Floquet Fermi Liquid,” Phys. Rev. Lett. **132**, 146402 (2024).

[4] L.-k. Shi, O. Matsyshyn, J. C. W. Song, and I. Sodemann Villadiego, "Ultracritical Floquet Non-Fermi Liquid," Phys. Rev. Lett. **134**, 196401 (2025).

[5] Z. Guo, X.-Y. Liu, H. Wang, L.-k. Shi, and K. Chang, "Dissipation-Shaped Quantum Geometry in Nonlinear Transport," Phys. Rev. Lett. **136**, 206303 (2026).