

# Symmetry Theory of Magnetism

## 刘奇航报告笔记：Classification of Magnetic Orders

### 摘要

传统磁性分类常用净磁矩区分 ferromagnetism 和 antiferromagnetism:

$$\text{FM: } \mathbf{M}_s \neq 0, \quad \text{AFM: } \mathbf{M}_s = 0.$$

刘奇航报告的核心是：这个分类太粗。现代磁性分类应该从 magnetic structure 出发，确定 spin point group、spin space group 和 magnetic space group，然后用表示论判断电子能带、磁激发、symmetry-protected modes、allowed/forbidden responses 和 topology。其主线是

magnetic order  $\Rightarrow$  spin point/space group  $\Rightarrow$  symmetry breaking  
 $\Rightarrow$  representation theory  $\Rightarrow$  excitations / responses / topology

一句话总结：磁性不是简单看红蓝箭头是否相互抵消，而是要问

which spin-space operation is tied to which real-space operation?

这个联合对称性决定能带是否自旋劈裂、Berry curvature 是否抵消、AHE 是否允许、magnon 节点是否受保护，以及磁性拓扑能否出现。

## 目录

1 为什么传统 FM/AFM 分类不够	2
2 Spin space group 的定义	3
3 用 $P_{\text{spin}}$ 重新定义 FM/AFM	4
4 Spin translational group: AFM 的更细分类	4
5 Altermagnetism: 零净磁矩与动量依赖自旋劈裂	5
6 FM property I: AHE 是 Berry curvature response	6
7 FM property II: spin-split AFM	7
8 $\text{MnTe}_2$ : noncoplanar spin-split AFM	8
9 Oriented spin space group 与 SOC tensor	8

1 为什么传统 FM/AFM 分类不够	2
10 SOC 诱导磁化与 spin-orbit magnetism	9
11 Allowed/forbidden responses: 对称性作为选择定则	10
12 Topology: 从表示论到 Berry curvature	10
13 报告总图像	11

## 1 为什么传统 FM/AFM 分类不够

传统上我们说：

$$\text{FM: } \mathbf{M}_s \neq 0, \quad \text{AFM: } \mathbf{M}_s = 0,$$

其中

$$\mathbf{M}_s = \frac{1}{V_{\text{cell}}} \int_{\text{cell}} \mathbf{S}(\mathbf{r}) d^3r.$$

Néel 反铁磁的图像更具体：两个 magnetic sublattices 晶体学等价，但磁矩反平行：

$$A: \mathbf{S}_A = +\mathbf{S}, \quad B: \mathbf{S}_B = -\mathbf{S}.$$

这说明 AFM 不只是“up-down arrows”，而是一个 crystallographic equivalence statement：忽略自旋方向以后，两个子晶格处于同一种晶体环境。

但是刘老师强调，这种分类无法回答现代磁性材料中真正重要的问题。例如：

$$E_{\uparrow}(\mathbf{k}) \stackrel{?}{=} E_{\downarrow}(\mathbf{k}), \quad \Omega(\mathbf{k}) \stackrel{?}{=} 0, \quad \sigma_{xy}^A \stackrel{?}{=} 0.$$

这些问题不是由  $\mathbf{M}_s$  是否为零直接决定，而是由 magnetic symmetry 决定。

传统 magnetic space group 描述的是磁结构保留下来的操作。若  $g = \{R|\tau\}$  是一个实空间操作，磁矩作为 axial vector 变换为

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \mapsto \eta_g \det(R) R \mathbf{S}(g^{-1}\mathbf{r}),$$

其中  $\eta_g = +1$  表示不带时间反演， $\eta_g = -1$  表示该操作与  $\mathcal{T}$  组合。磁空间群回答的问题是：

which operations leave  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  invariant?

但它不一定唯一告诉我们磁结构本身是什么。

Magnetic group 不是充分区分 FM/AFM 的原因有三点：

- (i) 它只记录剩余对称性，不记录 order parameter 的大小；
- (ii) 它能判断某个磁化分量是否 allowed，但不能保证实际非零；
- (iii) 它默认 spin rotation 与 real-space rotation 锁在一起，不能完整描述弱 SOC 极限下二者的独立性。

例如一个磁群可以允许 weak ferromagnetic canting,

$$\mathbf{M}_{\text{FM}} \neq 0,$$

但实际体系可以由于能量原因取  $\mathbf{M}_{\text{FM}} = 0$ 。反过来，两个主要是 AFM 的结构可能拥有相近甚至相同的剩余磁群，但一个带有微小 canting，另一个没有。群论只告诉你

$$\mathbf{M}_{\text{FM}} \text{ allowed or forbidden,}$$

而不自动告诉你

$$|\mathbf{M}_{\text{FM}}| = 0 \quad \text{or} \quad |\mathbf{M}_{\text{FM}}| \neq 0.$$

更深的问题是：在弱 SOC 材料中，自旋空间和实空间并不必须锁定。此时顺磁相近似有

$$SO(3)_{\text{spin}} \times G_{\text{crystal}}$$

的独立对称性。普通 magnetic group 无法充分利用这个结构，因此需要 spin group 或 spin space group。

## 2 Spin space group 的定义

在无 SOC 或弱 SOC 极限中，一个更自然的对称操作写成

$$[g_s \| g_r],$$

其中  $g_s$  是自旋空间操作， $g_r = \{R|\tau\}$  是实空间操作。它作用在磁结构上：

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \mapsto g_s \mathbf{S}(g_r^{-1} \mathbf{r}).$$

如果该操作保持磁结构不变，则

$$g_s \mathbf{S}(g_r^{-1} \mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}).$$

所有满足这个条件的联合操作构成 spin space group：

$$\mathcal{G}_{\text{SSG}} = \{[g_s \| g_r] \mid g_s \mathbf{S}(g_r^{-1} \mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r})\}.$$

磁序的出现就是一个 symmetry-breaking pattern：

$$SO(3)_{\text{spin}} \times G_{\text{crystal}} \longrightarrow \mathcal{G}_{\text{SSG}}.$$

这句话的物理含义是：磁序选择了某种自旋纹理，因此来自旋空间和晶格空间的独立对称性只剩下部分联合操作。

Spin space group 的关键不是把 ordinary magnetic group 换个名字，而是允许

$$g_s \neq R_r.$$

也就是说，实空间旋转多少和自旋空间旋转多少不必相同。这个自由度正是弱 SOC 磁性材料中许多额外简并、拓扑保护和自旋劈裂的来源。

在某个动量  $\mathbf{k}$  处，电子能带或 magnon 模式由 little group

$$G_{\mathbf{k}} = \{[g_s \| g_r] \in \mathcal{G}_{\text{SSG}} \mid g_r \mathbf{k} = \mathbf{k} + \mathbf{G}\}$$

的表示论决定。如果  $G_{\mathbf{k}}$  有二维不可约表示，则该处能带或 magnon mode 被强制简并；如果存在反么正对称性，比如  $\mathcal{PT}$  或  $\mathcal{T}\tau$ ，则可能出现 Kramers-like degeneracy。所谓 symmetry-protected mode，就是这种由表示论强制的简并、交叉点、nodal line 或高重 magnon 节点。

### 3 用 $P_{\text{spin}}$ 重新定义 FM/AFM

刘奇航最近的 oriented spin space group 分类给出一个更内禀的 FM/AFM 定义。核心不是问实际算出来的  $\mathbf{M}_s$  大小，而是问 spin point group 是否强制

$$\mathbf{M}_s = \frac{1}{V_{\text{cell}}} \int_{\text{cell}} \mathbf{S}(\mathbf{r}) d^3r$$

为零。

若  $P_{\text{spin}}$  是 non-polar，任何净自旋磁化都被对称性禁止：

$$\mathbf{M}_s = 0 \quad \text{enforced by symmetry.}$$

此时分类为 AFM。若  $P_{\text{spin}}$  是 polar，允许某个方向的净自旋磁化：

$$\mathbf{M}_s \neq 0 \quad \text{allowed,}$$

则归入 FM/ferrimagnet 类。

$P_{\text{spin}} \text{ non-polar} \Rightarrow \mathbf{M}_s = 0 \text{ enforced} \Rightarrow \text{AFM,}$ $P_{\text{spin}} \text{ polar} \Rightarrow \mathbf{M}_s \neq 0 \text{ allowed} \Rightarrow \text{FM/ferrimagnet.}$
--

这里的 FM 是 symmetry category，包括 ferrimagnetism；因为 ferrimagnet 的两个反平行子晶格不等价，磁矩大小不相等，因此允许非零净磁矩：

$$\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B \neq 0.$$

这里的 AFM 也比传统 Néel AFM 更宽，包括 ordinary AFM、altermagnet、spiral AFM、noncoplanar AFM、multiaxial AFM 等。

### 4 Spin translational group: AFM 的更细分类

仅仅知道  $\mathbf{M}_s = 0$  还不够。很多完全不同的磁结构都可以满足零净磁矩，例如普通 Néel AFM、螺旋 AFM、multi- $q$  AFM。刘老师进一步引入 spin translational group：

$$T_{\text{spin}} = \{[g_s || 1 | \tau] \in \mathcal{G}_{\text{SSG}}\}.$$

它描述的是：实空间平移  $\tau$  后，自旋不是简单重复，而是经过某个自旋空间操作  $g_s$  后重复：

$$\mathbf{S}(\mathbf{r} + \tau) = g_s \mathbf{S}(\mathbf{r}).$$

这比普通 propagation vector  $\mathbf{q}$  更细。普通写法

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{S}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

只告诉我们周期或波矢，却不完整记录“平移对应什么自旋操作”。Spin translational group 直接记录这种传播规则。

例如一维 Néel AFM：

$$\mathbf{S}_{n+1} = -\mathbf{S}_n.$$

它的平移一个格点不是普通对称性，但平移后再做自旋翻转是对称性：

$$[U_2||1|a] \in T_{\text{spin}}.$$

螺旋磁序

$$\mathbf{S}_n = S(\cos nq, \sin nq, 0)$$

满足

$$\mathbf{S}_{n+1} = R_z(q)\mathbf{S}_n,$$

所以

$$[R_z(q)||1|a] \in T_{\text{spin}}.$$

表 1: AFM 的 spin translational group 细分类

类别	$T_{\text{spin}}$ 结构	物理图像
primary AFM	只有 identity	磁结构复杂性已经存在于 magnetic primary cell 内部；平移本身不携带非平凡自旋操作。
bicolour AFM	有二阶 spin translation	平移半个磁周期对应自旋翻转；最接近教科书式上下交替 Néel order。
spiral AFM	$T_{\text{spin}}$ 是阶数大于 2 的 cyclic group	平移对应绕固定自旋轴旋转；描述 helimagnet 或 spiral order。
multiaxial AFM	$T_{\text{spin}}$ 是非循环 Abelian group	不同方向的平移对应不同自旋轴的旋转；适合描述 multi- $q$ 或复杂非共面磁序。

因此刘老师的分类逻辑可以写成：

$$\boxed{\text{FM/AFM by } P_{\text{spin}}, \quad \text{AFM geometry by } T_{\text{spin}}.}$$

## 5 Altermagnetism: 零净磁矩与动量依赖自旋劈裂

Altermagnetism 可以简洁定义为

$$\boxed{\text{collinear compensated magnetic order} + \text{nonrelativistic momentum-dependent spin splitting.}}$$

它像 AFM，因为

$$\mathbf{M}_s = 0.$$

但它又像 FM，因为能带可以在同一个  $\mathbf{k}$  点出现自旋劈裂：

$$E_{\uparrow}(\mathbf{k}) \neq E_{\downarrow}(\mathbf{k}).$$

普通铁磁的最小模型是

$$H_{\text{FM}}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})\sigma_0 + \Delta\sigma_z,$$

因此

$$E_{\uparrow,\downarrow}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) \pm \Delta.$$

普通共线 AFM 若有  $\mathcal{PT}$  或  $\mathcal{T}\tau$  对称性，则常常强制

$$E_{\uparrow}(\mathbf{k}) = E_{\downarrow}(\mathbf{k}).$$

这里  $\mathcal{T}\tau$  表示时间反演加半格平移， $\mathcal{PT}$  表示反演加时间反演。它们把  $\uparrow$  与  $\downarrow$  在同一个  $\mathbf{k}$  点重新配对，因此保护 spin degeneracy。

Altermagnet 的关键不同在于：反平行磁矩子晶格不是由简单平移或反演联系，而是由旋转、镜面等晶体操作联系。因此对称性通常要求

$$E_{\uparrow}(\mathbf{k}) = E_{\downarrow}(g\mathbf{k}),$$

而不是

$$E_{\uparrow}(\mathbf{k}) = E_{\downarrow}(\mathbf{k}).$$

所以 generic  $\mathbf{k}$  点允许自旋劈裂。

一个最小模型是

$$H_{\text{AM}}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})\sigma_0 + \Delta f(\mathbf{k})\sigma_z.$$

其中  $f(\mathbf{k})$  由晶体对称性决定，并满足某种交替关系：

$$f(g\mathbf{k}) = -f(\mathbf{k}).$$

例如二维中常见的  $d$ -wave spin splitting 可写成

$$f(\mathbf{k}) \sim k_x^2 - k_y^2.$$

这不是 Rashba SOC。Rashba 模型为

$$H_R = \alpha(k_y\sigma_x - k_x\sigma_y),$$

来自 SOC 与反演破缺；而 altermagnetic splitting 可以在无 SOC 极限中出现，来自 exchange field 与晶体旋转/镜面对称性的共同作用。

Altermagnetism 的真正卖点是：它同时拥有 AFM 的零净磁矩和 FM 的 spin-split band functionality。它没有强 stray field，却可以产生强 spin-polarized transport。

## 6 FM property I: AHE 是 Berry curvature response

刘老师说的“FM property I: AHE”指 anomalous Hall effect。普通 Hall effect 需要外磁场和 Lorentz force；而 intrinsic AHE 来自 Bloch 波函数的 Berry curvature。半经典运动方程为

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}), \quad \hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E}.$$

因此产生 anomalous velocity：

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{anom}} = \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}).$$

内禀 AHE conductivity 为

$$\sigma_{ij}^A = -\frac{e^2}{\hbar} \sum_n \int_{\text{BZ}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_{nk} \epsilon_{ijk} \Omega_n^k(\mathbf{k}).$$

牛谦老师关于 intrinsic AHE 的工作正是把 ferromagnets 中的 AHE 与 occupied Bloch states 的 momentum-space Berry curvature 联系起来。

Berry curvature 在时间反演和反演下满足

$$\mathcal{T}: \quad \Omega(\mathbf{k}) \mapsto -\Omega(-\mathbf{k}),$$

$$P: \quad \Omega(\mathbf{k}) \mapsto \Omega(-\mathbf{k}).$$

如果体系同时有  $\mathcal{PT}$ ，则两者合起来强烈限制

$$\Omega(\mathbf{k}) = 0.$$

因此 AHE 是否允许，不是简单由净磁矩决定，而是由 magnetic symmetry 决定。

定义 AHE axial vector:

$$\sigma_i^A = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk}^A.$$

它像磁矩一样是轴矢量，并且在时间反演下变号。如果某个保留对称性把它变成负号，而磁结构本身不变，则必须

$$\sigma^A = 0.$$

如果磁群不禁止它，则即使  $\mathbf{M}_s = 0$ ，某些 compensated magnets 也可以有 AHE。换句话说：

AHE is a symmetry-allowed Berry-curvature response, not a direct measure of net magnetization.

## 7 FM property II: spin-split AFM

FM 的另一个重要功能是 exchange spin splitting。铁磁中有

$$H_{\text{FM}} = \varepsilon(\mathbf{k})\sigma_0 + \Delta\sigma_z,$$

所以两个自旋通道的 Fermi surfaces 不同：

$$\text{FS}_\uparrow \neq \text{FS}_\downarrow.$$

这正是 spin valve、GMR、TMR、spin-transfer torque 等 spintronics 功能的基础。

刘老师说的“spin-split AFM”是：某些 AFM 虽然

$$\mathbf{M}_s = 0,$$

但仍有

$$E_\uparrow(\mathbf{k}) \neq E_\downarrow(\mathbf{k}).$$

一般模型写成

$$H(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})\sigma_0 + \mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

其能量为

$$E_\pm(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) \pm |\mathbf{d}(\mathbf{k})|.$$

只要对称性不强制

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = 0,$$

就可以有 spin splitting。

因此

$$\text{altermagnet} \subset \text{spin-split AFM}.$$

Altermagnet 是 collinear spin-split AFM; 但 noncollinear 或 noncoplanar AFM 也可以 spin split。

## 8 $MnTe_2$ : noncoplanar spin-split AFM

$MnTe_2$  是刘奇航组参与的重要例子。它不是严格 altermagnet, 因为它不是 collinear AFM, 而是 noncoplanar antiferromagnet。但它是 spin-split AFM: 在零净磁矩的反铁磁背景中, 电子能带出现由 AFM order 诱导的 spin splitting。

实验观察到的核心是 plaid-like spin splitting: in-plane spin components 关于 Brillouin zone 高对称平面反对称。一个简单的低阶形式是

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \sim (k_y k_z, k_x k_z, k_x k_y).$$

因此

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) \pm |\mathbf{d}(\mathbf{k})|.$$

在固定  $k_z \neq 0$  的切片上,

$$d_x \sim k_y, \quad d_y \sim k_x.$$

于是  $S_x$  跨过  $k_y = 0$  变号,  $S_y$  跨过  $k_x = 0$  变号。动量空间中就出现棋盘状、格纹状的自旋极化, 即 plaid-like spin texture。

这个结果的重要性在于: 它不是普通 Rashba splitting。Rashba splitting 来自

$$H_R = \alpha(k_y \sigma_x - k_x \sigma_y),$$

需要 SOC 和结构反演破缺; 而  $MnTe_2$  的 spin splitting 主要来自 AFM order 本身。它说明: 只要磁结构破坏了保护同一  $\mathbf{k}$  点自旋简并的对称性, AFM 也可以有强的 momentum-dependent spin polarization。

$MnTe_2$  的物理图像:

$$\text{noncoplanar AFM} \Rightarrow \text{no degeneracy-protecting } \mathcal{PT} \text{ or } \mathcal{T}\tau \Rightarrow \mathbf{d}(\mathbf{k}) \neq 0.$$

剩余镜面对称进一步规定  $\mathbf{d}(\mathbf{k})$  的奇偶性, 于是形成 plaid-like spin texture。

## 9 Oriented spin space group 与 SOC tensor

SSG 描述的是弱 SOC 极限, 其中 spin space 和 real space 可以部分解耦。真实材料中 SOC 会把自旋和晶格方向锁定。为了描述这个过程, 刘老师引入 oriented spin space group, OSSG:

$$\mathcal{G}_{\text{SSG}} \longrightarrow \mathcal{G}_{\text{OSSG}} \longrightarrow \mathcal{G}_{\text{MSG}}.$$

其中  $\mathcal{G}_{\text{OSSG}}$  可以理解为给 SSG 选择一个相对于晶格的磁矩取向，从而把 spin group framework 与 ordinary magnetic space group framework 接起来。

SOC 可以写成 tensor form:

$$H_{\text{SOC}} = \lambda \mathbf{L}^T \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\sigma} = \lambda \sum_{ij} \chi_{ij} L_i \sigma_j.$$

这里  $\chi_{ij}$  记录 real-space basis 与 spin-space basis 的相对取向:

$$\chi_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_j.$$

如果自旋空间和实空间完全锁定，可以取

$$\chi_{ij} = \delta_{ij}.$$

但在 SSG/OSSG 语言里， $\boldsymbol{\chi}$  本身应被看成一个 symmetry-breaking field.

在联合操作  $[g_s \| g_l]$  下，设实空间矩阵为  $R_l$ ，自旋空间矩阵为  $R_s$ ，则 SOC tensor 的变换形式可写成

$$\boldsymbol{\chi} \mapsto \boldsymbol{\chi}' = \det(R_s) \det(R_l) R_l^{-1} \boldsymbol{\chi} R_s.$$

这个公式的意义是：SOC 不是一个无结构常数，而是一个把 spin space 和 real space 锁定的张量对象。

## 10 SOC 诱导磁化与 spin-orbit magnetism

有了 SOC tensor 后，可以把 magnetization 展开为  $\lambda \boldsymbol{\chi}$  的级数:

$$M_a[\boldsymbol{\chi}] = \omega_a^{(0)} + \lambda \sum_{ij} \omega_{a,ij}^{(1)} \chi_{ij} + \lambda^2 \sum_{ijkl} \omega_{a,ij,kl}^{(2)} \chi_{ij} \chi_{kl} + \dots$$

对称性逐阶限制这些系数。若

$$\omega_a^{(0)} = 0, \quad \omega_{a,ij}^{(1)} \neq 0,$$

则 magnetization 是一阶 SOC 诱导的:

$$M_a \sim \lambda.$$

若一阶也被禁止，但二阶允许，则

$$M_a \sim \lambda^2.$$

这引出 spin-orbit magnetism, SOM:

SSG 层面强制 $\mathbf{M}_s = 0$ ,	SOC 降低对称性后 MSG 允许 $\mathbf{M} \neq 0$ .
-------------------------------	---

也就是说，在无 SOC 极限下它是 symmetry-enforced AFM; 打开 SOC 后，净磁化可以由 SOC 诱导出来。这不是普通 FM，而是 AFM geometry 加上 SOC-induced magnetization。

同样，orbital magnetization

$$\mathbf{M}_o$$

和 AHE vector

$$\boldsymbol{\sigma}^A$$

也可以按类似的对称性展开分析。某些体系中，spin magnetization 可能从  $\lambda^2$  才出现，而 orbital magnetization 或 AHE 可以从  $\lambda$  出现。这解释了为什么某些 AFM 的净 spin moment 很小，却可以有明显的 orbital response 和 AHE。

## 11 Allowed/forbidden responses: 对称性作为选择定则

一个物理响应能否存在，本质上是张量是否在磁群或 spin group 下有不变量。例如线性磁电效应：

$$P_i = \alpha_{ij} H_j, \quad M_i = \alpha_{ji} E_j.$$

如果某个保留对称性把  $\alpha_{ij}$  变成  $-\alpha_{ij}$ ，则

$$\alpha_{ij} = 0.$$

AHE、MOKE、ANE、spin Hall effect、nonreciprocal transport 也遵循同样逻辑。

因此现代磁性分类不是只问：

$$\mathbf{M}_s = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{M}_s \neq 0,$$

而是问：

Does symmetry allow  $\sigma^A$ ?

Does symmetry force  $E_{\uparrow}(\mathbf{k}) = E_{\downarrow}(\mathbf{k})$ ?

Does symmetry allow spin current generation?

Does symmetry protect magnon degeneracy?

Does symmetry allow Berry curvature and topology?

## 12 Topology: 从表示论到 Berry curvature

磁性拓扑材料的统一逻辑是

$$G_{\text{spin}} \Rightarrow G_{\mathbf{k}} \text{ representation} \Rightarrow \text{degeneracy/Berry curvature} \Rightarrow \text{topological invariant/response.}$$

其中  $G_{\mathbf{k}}$  是动量  $\mathbf{k}$  处的 little group。它的表示论决定能带简并、magnon degeneracy、nodal line、Weyl point 等是否受到保护。

Berry curvature 决定 AHE 和 Chern number：

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{2\text{D BZ}} \Omega_n^z(\mathbf{k}) d^2k.$$

如果对称性强制

$$\Omega(\mathbf{k}) = -\Omega(\mathbf{k}),$$

则 Berry curvature 为零；如果对称性允许其不抵消，就可能产生 Chern bands、Weyl points、topological magnons 和 AHE。

Spin group 的重要性在于：它可能给出 ordinary magnetic group 看不到的额外反么正对称性或自旋-空间联合对称性，从而保护特殊的无 SOC 拓扑结构。打开 SOC 后，这些保护可能被破坏、降级或转化为 MSG 中的拓扑响应。

## 13 报告总图像

刘老师这次报告的逻辑可以最终整理为：

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathcal{G}_{\text{SSG}} \Rightarrow P_{\text{spin}}, T_{\text{spin}} \Rightarrow \text{FM/AFM and AFM geometry} \Rightarrow \text{spin splitting, AHE, topology.}$$

更完整地说：

$$SO(3)_{\text{spin}} \times G_{\text{crystal}} \longrightarrow G_{\text{spin}},$$

$$G_{\text{spin}} \longrightarrow \text{representation theory,}$$

$$G_{\text{spin}} \longrightarrow \text{allowed/forbidden response tensors,}$$

$$G_{\text{spin}} \longrightarrow \text{Berry curvature and topological bands.}$$

传统分类只看

$$\mathbf{M}_s = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{M}_s \neq 0.$$

现代 symmetry theory of magnetism 关心的是：

which spin-space operation relates the magnetic sublattices?

which translation carries which spin rotation?

which tensor response is symmetry-allowed?

which degeneracy or topology is symmetry-protected?

这就是从 Néel AFM 到 altermagnetism、spin-split AFM、anomalous-Hall AFM 和 spin-orbit magnetism 的统一语言。

## 参考文献

- [1] P. Liu, J. Li, J. Han, X. Wan, and Q. Liu, “Spin-Group Symmetry in Magnetic Materials with Negligible Spin-Orbit Coupling,” *Phys. Rev. X* **12**, 021016 (2022).
- [2] L. Šmejkal, J. Sinova, and T. Jungwirth, “Beyond Conventional Ferromagnetism and Antiferromagnetism: A Phase with Nonrelativistic Spin and Crystal Rotation Symmetry,” *Phys. Rev. X* **12**, 031042 (2022).
- [3] R. González-Hernández, L. Šmejkal, K. Výborný, Y. Yahagi, J. Sinova, T. Jungwirth, and J. Železný, “Efficient Electrical Spin Splitter Based on Nonrelativistic Collinear Antiferromagnetism,” *Phys. Rev. Lett.* **126**, 127701 (2021).
- [4] Y.-P. Zhu *et al.*, “Observation of Plaid-like Spin Splitting in a Noncoplanar Antiferromagnet,” *Nature* **626**, 523–528 (2024).
- [5] Q. Liu, X. Dai, and S. Blügel, “Different Facets of Unconventional Magnetism,” *Nature Physics* **21**, 329–331 (2025).

- [6] Y. Liu, X. Chen, Y. Yu, J. Etxebarria, J. M. Perez-Mato, and Q. Liu, “Symmetry Classification of Magnetic Orders Using Oriented Spin Space Groups,” *Nature* **652**, 869–873 (2026).
- [7] T. Jungwirth, Q. Niu, and A. H. MacDonald, “Anomalous Hall Effect in Ferromagnetic Semiconductors,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 207208 (2002).
- [8] Y. Yao *et al.*, “First Principles Calculation of Anomalous Hall Conductivity in Ferromagnetic bcc Fe,” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 037204 (2004).