

# Stable Topology in Exactly Flat Bands

宋志达 CCMP 溧阳报告 Lecture Note

整理笔记

2026 年 6 月 27 日

no-go theorem  $\Rightarrow$  CTFB  $\Rightarrow$   $\ker S^\dagger(\mathbf{k}) \Rightarrow$  symmetry indicator  
 $\Rightarrow \Delta B \Rightarrow$  robustness  $\Rightarrow$  TNS

宋志达老师这次报告的核心并不是简单构造一个平带模型，而是回答一个更尖锐的问题：在严格局域的晶格模型中，能否同时实现

exact flatness, finite-range hopping, stable topology?

传统 no-go theorem 说明，如果还要求平带与其他带处处有能隙，这三者不能同时成立。宋老师的策略不是违反 no-go theorem，而是通过孤立动量点处的 critical band touching 来“饱和”它。

## 目录

<b>1 总问题：什么是好的拓扑平带模型？</b>	<b>2</b>
<b>2 No-go theorem：每个词的限制</b>	<b>3</b>
2.1 Exactly flat . . . . .	3
2.2 Stable topology . . . . .	3
2.3 Gapped . . . . .	3
2.4 Finite-range hopping . . . . .	4
2.5 Models . . . . .	4
2.6 典型例子对照 . . . . .	4
<b>3 CTFB：连续但非解析的拓扑平带</b>	<b>4</b>
3.1 三类 flat band . . . . .	5
<b>4 Bipartite kernel construction：平带来自 <math>\ker S^\dagger</math></b>	<b>5</b>
4.1 Dirac-like operator 与 index 直觉 . . . . .	6
<b>5 Representation ring 中的形式差</b>	<b>6</b>
5.1 一个抽象例子 . . . . .	6

1 总问题：什么是好的拓扑平带模型？	2
<b>6 Symmetry indicator 与 <math>\Delta B</math></b>	<b>7</b>
6.1 为什么需要 $\Delta B$ . . . . .	7
6.2 $\Delta B$ 的数学语言 . . . . .	8
<b>7 第一个例子：带 <math>Z_2</math> 拓扑的 flat band</b>	<b>8</b>
7.1 Symmetry data 与 Fu-Kane 指标 . . . . .	8
7.2 加入 $\Delta B$ . . . . .	9
<b>8 为什么 gapless touching 不毁掉拓扑？</b>	<b>9</b>
<b>9 一般构造算法</b>	<b>10</b>
<b>10 连续性条件的群论含义</b>	<b>10</b>
<b>11 Robustness: CTFB 与 singular flat band 的区别</b>	<b>11</b>
11.1 CTFB 的 intrinsic topology . . . . .	11
11.2 Singular flat band 的 perturbation-dependent topology . . . . .	11
<b>12 Singular Wannier gauge 与 Chern number</b>	<b>11</b>
12.1 Chern number 的 winding 公式 . . . . .	12
<b>13 Tensor-network representation 与强关联意义</b>	<b>12</b>
<b>14 与吴从军老师 <math>p</math>-orbital flat band 的关系</b>	<b>13</b>
<b>15 物理图像总结</b>	<b>13</b>
<b>16 可以问宋老师的问题</b>	<b>14</b>

## 1 总问题：什么是好的拓扑平带模型？

宋老师报告的题目可以概括为

Stable topology in exactly flat bands.

所谓“好的拓扑平带模型”，至少应当满足四个要求。第一，它是一个晶格模型，而不是连续空间 Landau level。第二，它的能带是严格平的：

$$E_n(\mathbf{k}) = E_0, \quad \forall \mathbf{k} \in \text{BZ}.$$

第三，它的母 Hamiltonian 是短程的，最好只有最近邻或有限壳层 hopping：

$$H = \sum_{ij} t_{ij} c_i^\dagger c_j, \quad t_{ij} = 0 \quad \text{if } |i - j| > R_0.$$

第四，它不仅是单粒子能带论玩具，还应当可以作为强关联拓扑相的出发点，例如 fractional Chern insulator、fractional quantum anomalous Hall state，或者某种 tensor-network many-body state。

平带的物理意义在于压低单粒子动能。当

$$W \ll U$$

时, 相互作用投影后的 form factor、Berry curvature、quantum metric、Wannier obstruction 等波函数性质成为主导因素。宋老师的工作进一步追问: 如果  $W = 0$  且 hopping 仍然严格有限程, 还能否保留稳定拓扑?

## 2 No-go theorem: 每个词的限制

报告中的关键 statement 是:

Exactly flat bands with stable topology are impossible  
in gapped finite-range hopping models.

这句话中每个词都不能省略。

### 2.1 Exactly flat

Exactly flat 不是 nearly flat, 而是严格

$$E(\mathbf{k}) = E_0$$

在整个 Brillouin zone 中成立。普通 Chern-band 或 FCI 模型常常只要求

$$W \ll \Delta,$$

其中  $W$  是 bandwidth,  $\Delta$  是 band gap。但 no-go theorem 讨论的是  $W = 0$  的严格极限。

### 2.2 Stable topology

Stable topology 指 Chern number、strong  $Z_2$ 、mirror Chern number 等稳定拓扑指标。例如

$$C \neq 0, \quad \nu_{Z_2} = 1.$$

它们不能通过添加若干平庸原子带而消去。这里要和 fragile topology 区分开: fragile topology 也有 Wannier obstruction, 但加上一些 trivial bands 后可能被平庸化; stable topology 更硬。

### 2.3 Gapped

Gapped 指目标 flat band 与其他能带在整个 BZ 上都相隔有限能隙:

$$E_{\text{other}}(\mathbf{k}) - E_{\text{flat}} \neq 0, \quad \forall \mathbf{k}.$$

宋老师的突破点正是在这里: 他主动放弃 gapped, 允许 flat band 与 dispersive bands 在孤立点相碰, 从而得到 critical topological flat band。

## 2.4 Finite-range hopping

Finite-range hopping 要求实空间 hopping 只存在到有限距离:

$$t_{ij} = 0, \quad |i - j| > R_0.$$

这意味着 Bloch Hamiltonian 是  $e^{ik_x}, e^{ik_y}, e^{ik_z}$  的有限阶 Laurent polynomial。很多人工谱平坦化后的拓扑带虽然 exact flat, 但 Fourier 回实空间后通常有无限长程 hopping, 因此不满足这个条件。

## 2.5 Models

这里的 model 主要指非相互作用 tight-binding band model, 而不是连续 Landau level, 也不是直接给一个 many-body trial wavefunction。它问的是: 是否存在一个严格局域单粒子晶格 Hamiltonian, 使某条孤立能带既完全平, 又具有 stable topology?

## 2.6 典型例子对照

例子	exact flat	stable topology	gapped	finite range
Landau level	✓	✓	✓	×
Flattened Chern band	✓	✓	✓	×
Ordinary Haldane model	×	✓	✓	✓
Kagome/Lieb/dice FB	✓	通常 × 或 singular	常有 touching	✓
Kapit-Mueller model	✓	✓	✓	×
Song CTFB	✓	✓	×	✓

宋老师的策略是:

保留 exact flatness、finite range、stable topology; 放弃 gapped。

代价是 band touching, 收获是  $P(\mathbf{k})$  连续但非解析, 从而 topology 仍然良定义。

## 3 CTFB: 连续但非解析的拓扑平带

宋老师引入的核心概念是

CTFB = critical topological flat band.

它既不是普通 gapped flat band, 也不是普通 singular flat band, 而是满足

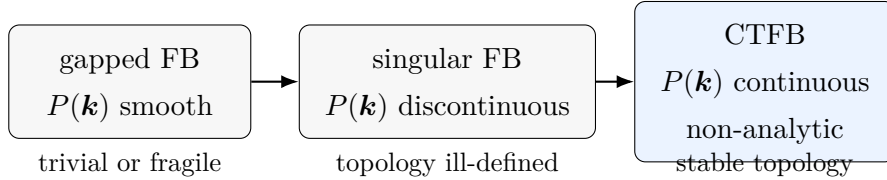
$P(\mathbf{k})$  continuous but non-analytic

的临界拓扑平带。这里

$$P(\mathbf{k}) = \sum_{n \in \text{FB}} |u_{n\mathbf{k}}\rangle \langle u_{n\mathbf{k}}|$$

是投影到 flat-band 子空间的 projector。

### 3.1 三类 flat band



Gapped exact flat band 在 finite-range model 中若具有解析 projector，则不能有 stable topology。Singular flat band 的  $P(\mathbf{k})$  在 touching point 不连续，因此拓扑不变量本身不良定义。CTFB 则刚好位于二者之间：它允许 gapless touching，但要求 projector 的极限方向无关，因此 topology 可以定义；与此同时，非解析性又避免了 no-go theorem。

CTFB 的相关函数一般幂律衰减。例如二维例子中，

$$C(r) \sim r^{-4}.$$

所以 CTFB 是 critical 的，但并不等于拓扑不良定义。

## 4 Bipartite kernel construction: 平带来自 $\ker S^\dagger$

宋老师构造 exact flat band 的基本工具是 bipartite Hamiltonian:

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & S(\mathbf{k}) \\ S^\dagger(\mathbf{k}) & -\Delta I \end{pmatrix}.$$

这里  $L$  是较大的子格， $\tilde{L}$  是较小的子格； $S(\mathbf{k})$  描述二者之间的 hopping。若

$$S^\dagger(\mathbf{k})u(\mathbf{k}) = 0,$$

则

$$H(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} u(\mathbf{k}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S^\dagger(\mathbf{k})u(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = 0.$$

因此零能 flat band 自动由

$$\text{FB} = \ker S^\dagger(\mathbf{k})$$

给出。

Exact flatness 不是通过调参得到的，而是由 rectangular matrix  $S^\dagger(\mathbf{k})$  的 kernel 自动保证的。如果  $L$  子格比  $\tilde{L}$  子格多  $q$  个自由度，并且  $S^\dagger$  一般满秩，则通常会有  $q$  条零能 flat bands。

#### 4.1 Dirac-like operator 与 index 直觉

这个结构可以类比 Dirac operator 的零模问题：

$$D\psi = 0 \quad \longleftrightarrow \quad S^\dagger(\mathbf{k})u(\mathbf{k}) = 0.$$

在 Landau level 中，最低 Landau level 可以看成某个 Dirac 或  $\bar{\partial}_A$  算符的 kernel；零模数由磁通或曲率决定。宋老师这里把类似思想搬到晶格动量空间： $S^\dagger(\mathbf{k})$  是一个有限维矩阵族， $\ker S^\dagger(\mathbf{k})$  随  $\mathbf{k}$  形成一个 kernel bundle。

需要强调的是，这不是直接应用 Atiyah–Singer index theorem。Atiyah–Singer 处理的是实空间流形上的椭圆微分算符：

$$\text{ind}(D) = \dim \ker D_+ - \dim \ker D_-.$$

宋老师这里更像是 finite-dimensional、momentum-space、space-group equivariant 的 index construction：

$$S^\dagger(\mathbf{k}) : L_{\mathbf{k}} \longrightarrow \tilde{L}_{\mathbf{k}}.$$

如果  $S^\dagger$  满秩， $\ker S^\dagger$  给出 flat band；在 touching point 处  $S^\dagger$  失秩，便出现局域 kernel/cokernel mismatch。

## 5 Representation ring 中的形式差

宋老师写的

$$\text{CTFB}' = B_L \boxminus B_{\tilde{L}}$$

或者论文中的

$$B + \Delta B = BR_L \boxminus BR_{\tilde{L}}$$

不是能量相减，而是 representation ring 中的形式相减。

$BR_L$  和  $BR_{\tilde{L}}$  是由两个子格局域轨道诱导出的 band representations。共同出现的 irreps 会通过  $S(\mathbf{k})$  hybridize 掉；只在  $L$  中多出来的正重数 irreps 留在零能 flat band；只在  $\tilde{L}$  中多出来的负重数 irreps 则描述 touching point 附近被减掉的部分。

形式符号  $\boxminus$  满足

$$\rho \oplus \rho' \boxminus \rho' = \rho.$$

它不是说 Hilbert space 中真的有负的态，而是用虚表示记录对称性表示的抵消。

### 5.1 一个抽象例子

在某个高对称点  $K_0$ ，假设

$$BR_L(K_0) = 2\rho \oplus \sigma, \quad BR_{\tilde{L}}(K_0) = \sigma.$$

那么

$$BR_L(K_0) \boxminus BR_{\tilde{L}}(K_0) = 2\rho.$$

物理意思是： $\sigma$  在两个子格中都有 counterpart，可以被  $S$  hybridize 并移出零能；剩下  $2\rho$  留在 flat band 中。

如果某处出现

$$2\rho \boxplus \sigma,$$

则说明这个高对称点包含正重数和负重数。负重数不是一条负能带，而是表示在 touching point 中， $\tilde{L}$  侧存在一个无法在  $L$  中完全匹配的局域表示，它正是临界接触的来源之一。

## 6 Symmetry indicator 与 $\Delta B$

设目标拓扑平带的 symmetry data 是

$$B = (\text{irreps at } \Gamma, K, M, \dots).$$

这是一个向量，记录 band 在各个高对称动量点的小群 irreps。Symmetry indicator 是一个从 symmetry data 到拓扑指标的映射：

$$B \mapsto \text{SI}(B).$$

若

$$\text{SI}(B) \neq 0,$$

则说明  $B$  具有 stable topology，例如 Chern number、strong  $Z_2$  index 或 crystalline topological invariant。

### 6.1 为什么需要 $\Delta B$

若  $B$  本身有非平庸 stable topology，它不能直接在 gapped finite-range exact flat model 中实现。宋老师引入 zero-band correction

$$\Delta B$$

满足

$$\text{rank}(\Delta B) = 0, \quad \text{SI}(\Delta B) = -\text{SI}(B).$$

于是

$$\text{SI}(B + \Delta B) = 0.$$

这样  $B + \Delta B$  可以写成两个 band representations 的形式差：

$$\boxed{B + \Delta B = BR_L \boxplus BR_{\tilde{L}}.}$$

$B$  负责目标拓扑； $\Delta B$  负责引入 touching point； $B + \Delta B$  负责变成可由 bipartite finite-range Hamiltonian 实现的表示数据。

## 6.2 $\Delta B$ 的数学语言

$\Delta B$  不是普通上同调里的 coboundary，但它确实像一个局域 counterterm。更准确地说，它是 representation ring 或 equivariant  $K$ -theory 中的 zero-rank virtual representation。

从 index 的角度看，

$$S^\dagger(\mathbf{k}) : L_{\mathbf{k}} \rightarrow \tilde{L}_{\mathbf{k}}.$$

形式上可以类比

$$[\ker S^\dagger] - [\operatorname{coker} S^\dagger] = [L] - [\tilde{L}].$$

在普通动量点， $\operatorname{coker} S^\dagger$  不出现；但在 touching point， $S^\dagger$  失秩，出现局域 kernel/cokernel mismatch。这个局域失配在 symmetry data 层面就是

$$\Delta B.$$

$\Delta B$  并没有消除拓扑。它的作用是把 topology obstruction 转移到 critical touching point。换句话说，CTFB 不是平庸带，而是 global topology 与 local singular index defect 精确平衡后的对象。

## 7 第一个例子：带 $Z_2$ 拓扑的 flat band

宋老师首先讲的是一个二维 time-reversal-protected  $Z_2$  CTFB。模型的 bipartite Hamiltonian 为

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0_{6 \times 6} & S(\mathbf{k}) \\ S^\dagger(\mathbf{k}) & -\Delta I_{4 \times 4} \end{pmatrix}.$$

这里  $L$  子格有 6 个轨道， $\tilde{L}$  子格有 4 个轨道。因此在一般满秩情况下，

$$\dim \ker S^\dagger = 6 - 4 = 2.$$

这给出两条零能 flat bands，也就是一对 Kramers 相关的平带。

### 7.1 Symmetry data 与 Fu-Kane 指标

目标平带的 symmetry data 可写作

$$B = (\Gamma_8; K_6; M_5 M_6).$$

其中  $K$  点不是 time-reversal invariant momentum，故不直接进入二维  $Z_2$  Fu-Kane parity formula。真正参与  $Z_2$  判断的是

$$\Gamma, \quad 3M.$$

Fu-Kane 公式给出

$$\delta = n_{\Gamma} + 3n_{\bar{M}} \pmod{2}.$$

在这个例子中，

$$\Gamma_8 \text{ 为偶宇称, } \quad M_5 M_6 \text{ 为奇宇称.}$$

因此

$$\delta = 0 + 3 \times 1 = 1 \pmod{2}.$$

这说明目标 flat band 具有非平庸  $Z_2$  拓扑。

## 7.2 加入 $\Delta B$

为了实现这个 CTFB，宋老师加入

$$\Delta B = (\Gamma_8 \boxplus \Gamma_9; 0; 0).$$

于是

$$B + \Delta B = (2\Gamma_8 \boxplus \Gamma_9; K_6; M_5 M_6).$$

这里  $\Gamma_8$  和  $\Gamma_9$  维数相同，所以  $\Delta B$  是 zero-rank；但二者的对称性性质不同，所以  $\Delta B$  可以携带与  $B$  相反的 symmetry-indicator 贡献。

物理上， $\Gamma$  点的  $2\Gamma_8$  是零能平带侧的正重数表示， $\Gamma_9$  是被减掉的一侧表示。二者共同描述了  $\Gamma$  点附近的 critical touching。

## 8 为什么 gapless touching 不毁掉拓扑？

关键是证明 projector  $P(\mathbf{k})$  在 touching point 连续。宋老师在  $\Gamma$  点附近写低能  $k \cdot p$  形式：

$$S^\dagger(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 k_- & 0 & \gamma_2 k_- \\ \gamma_1 k_+ & 0 & \gamma_2 k_+ & 0 \end{pmatrix} + O(k^3), \quad k_\pm = k_x \pm i k_y.$$

求解

$$S^\dagger(\mathbf{k})u(\mathbf{k}) = 0.$$

当  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  时，两个 kernel basis 趋向常数向量

$$u_1 = (\gamma_2, 0, -\gamma_1, 0)^T, \quad u_2 = (0, \gamma_2, 0, -\gamma_1)^T.$$

这两个向量不依赖  $\mathbf{k}$  从哪个方向趋向 0。因此

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} P(\mathbf{k})$$

方向无关，projector 连续。

这个例子中：

exact flatness 来自  $6 - 4 = 2$ ,

$Z_2 = 1$  来自 Fu-Kane parity indicator,

$P(\mathbf{k})$  连续来自  $k \cdot p$  kernel 的方向无关极限。

这正是 CTFB 与 singular flat band 的核心区别。Singular flat band 中，kernel basis 或 projector 在 touching point 通常随趋近方向跳变；而这里虽然非解析，但极限是连续的。

## 9 一般构造算法

宋老师的构造可以写成如下流程：

$$B \longrightarrow B + \Delta B \longrightarrow BR_L \boxplus BR_{\tilde{L}} \longrightarrow S(\mathbf{k}) \longrightarrow \ker S^\dagger(\mathbf{k}) \longrightarrow \text{CTFB}.$$

1. 选择目标 symmetry data:

$$B = (\text{irreps at high-symmetry momenta}).$$

2. 要求

$$\text{SI}(B) \neq 0,$$

即目标带具有 stable topology。

3. 寻找 zero-band correction:

$$\text{rank}(\Delta B) = 0, \quad \text{SI}(\Delta B) = -\text{SI}(B).$$

4. 使得

$$B + \Delta B = BR_L \boxplus BR_{\tilde{L}}.$$

5. 构造 bipartite Hamiltonian:

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & S(\mathbf{k}) \\ S^\dagger(\mathbf{k}) & -\Delta I \end{pmatrix}.$$

6. 验证 touching point 处

$$P(\mathbf{k}) \text{ continuous but non-analytic.}$$

## 10 连续性条件的群论含义

在 touching point  $\mathbf{k}_0$  附近写

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{p}.$$

设零能侧有  $M$  份 irrep  $\rho$ , 被减掉的一侧有若干 irrep  $\sigma_i$ . 低能展开中

$$S^\dagger(\mathbf{p}) \sim \sum_{\mu} A_{\mu} p_{\mu}.$$

动量  $\mathbf{p}$  在小群下形成矢量表示  $v$ . 对称性允许的线性耦合数为

$$L_i = \langle 1, \rho \otimes \sigma_i^* \otimes v \rangle.$$

连续性的群论判据可以概括为

$$\langle 1, \rho \otimes \sigma_i^* \otimes v \rangle = q_{\rho} \frac{\dim \sigma_i}{\dim \rho}.$$

这里  $q_{\rho} = 1$  或  $2$ , 用来处理是否存在反么正对称性导致的 co-irrep 结构。

物理意思是：对称性必须足够强，使得从不同方向靠近 touching point 时， $\ker S^\dagger$  的极限子空间相同。这正是  $P(\mathbf{k})$  连续的必要结构。

## 11 Robustness: CTFB 与 singular flat band 的区别

宋老师还强调 CTFB 的稳定性。CTFB 的 touching point 由对称性与  $\Delta B$  精心设计。即使加入保持对称性的 gap-opening perturbation, 最终得到的 symmetry data 仍然是同一个  $B$ , 因此 Chern number 或  $Z_2$  index 不变。

### 11.1 CTFB 的 intrinsic topology

对于 CTFB:

$$P(\mathbf{k}) \text{ continuous.}$$

因此 gapless 时已经可以谈 topology。若进一步用对称扰动打开 gap, 得到的拓扑指标不依赖扰动细节。可以概括为

$$\Delta' > 0, \quad \Delta' = 0, \quad \Delta' < 0 \implies C \text{ or } Z_2 \text{ invariant unchanged.}$$

### 11.2 Singular flat band 的 perturbation-dependent topology

对于 Kagome/Lieb/dice 或 Wang Yao singular flat band, projector 在 touching point 不连续, 原始 flat band 的拓扑不良定义。加入微小扰动后, Chern number 可能由扰动符号决定:

$$\Phi > 0 \Rightarrow C = 1, \quad \Phi < 0 \Rightarrow C = -1, \quad \Phi = 0 \Rightarrow C \text{ not defined.}$$

所以 singular flat band 的 topology 不是 intrinsic 的, 而是 perturbation-dependent 的。

CTFB 与 singular flat band 的本质区别不是“有没有 touching”, 而是:

CTFB: touching 后  $P(\mathbf{k})$  连续;      singular FB: touching 后  $P(\mathbf{k})$  不连续.

## 12 Singular Wannier gauge 与 Chern number

把  $\tilde{L}$  子格积分掉, 可以得到  $L$  子格上的有效 Hamiltonian:

$$H_L(\mathbf{k}) = \frac{S(\mathbf{k})S^\dagger(\mathbf{k})}{\Delta}.$$

它与原始 bipartite Hamiltonian 有相同的零能 flat band, 因为二者的 flat band 都由

$$\ker S^\dagger(\mathbf{k})$$

给出。

色散带可以写成

$$U(\mathbf{k}) = S(\mathbf{k})[S^\dagger(\mathbf{k})S(\mathbf{k})]^{-1/2}.$$

如果  $S^\dagger S$  处处非奇异, 那么  $U(\mathbf{k})$  会给出一个良好的 Wannier gauge。然而在 CTFB 中,  $S^\dagger S$  在 touching point 奇异。因此这个 gauge 是

singular Wannier gauge.

### 12.1 Chern number 的 winding 公式

Chern number 可以完全由  $S(\mathbf{k})$  在 touching point 附近的 winding 给出：

$$C = \frac{i}{2\pi} \sum_i \oint_{\partial D_i} d\mathbf{k} \cdot \text{Tr} \left[ (S^\dagger S)^{-1} S^\dagger \partial_{\mathbf{k}} S \right].$$

这里  $D_i$  是包围第  $i$  个 touching point 的无穷小圆盘。这个公式说明：拓扑不是来自能量色散，而是来自  $S(\mathbf{k})$  在奇点周围的相位绕数。

例如在一个  $C = 1$  CTFB 例子中，低能块具有

$$S^\dagger(\mathbf{p}) = (\gamma_1(p_x + ip_y), \gamma_2(p_x + ip_y)).$$

因为

$$p_x + ip_y = p e^{i\theta}$$

绕原点一圈获得  $2\pi$  phase winding，所以给出

$$C = 1.$$

## 13 Tensor-network representation 与强关联意义

填满 CTFB 后得到的 many-body state 虽然是 critical 的，但仍然 obey area law。其单粒子相关函数可以出现幂律衰减，例如

$$C(r) \sim r^{-4}.$$

这种幂律来自  $P(\mathbf{k})$  在 touching point 的有限阶非解析性。

另一方面，因为  $S(\mathbf{k})$  来自 finite-range hopping，实空间中的  $S_{ia,jb}$  是局域矩阵。填满 CTFB 的态可以写成

$$|\Omega_L\rangle = \prod_{\mathbf{k}, n} \left( \sum_{\alpha} \psi_{\mathbf{k}\alpha} S_{\alpha n}^*(\mathbf{k}) \right) |F\rangle.$$

Fourier 回实空间后，这个表达天然具有有限局域支撑，因此可以改写成精确有限键维张量网络态。

宋老师的工作把三个看似张力很大的概念联系起来：

stable topology + exact flatness + exact finite-BD TNS.

代价是：

criticality and power-law correlations.

这与  $p + ip$  TNS / chiral PEPS 的历史背景很接近。在 chiral PEPS 中，topology 与 exact finite-bond-dimension TNS 可以共存，但往往必须付出 criticality 的代价。宋老师这里给出了一个 band-theory 侧的最佳起点：通过 CTFB，把 exact flat topological band 与 exact TNS 结构联系起来。

## 14 与吴从军老师 $p$ -orbital flat band 的关系

吴从军老师的  $p_x, p_y$  honeycomb flat band 来自 orbital directional hopping 和 destructive interference。  $p$  轨道沿键方向强烈耦合，某些 plaquette wavefunction 可以通过相消避免向外传播，从而形成 compact localized states。这可以理解成某种 kernel flat band：

$$\text{destructive-interference constraint} \iff S^\dagger(\mathbf{k})u(\mathbf{k}) = 0.$$

因此，吴老师的  $p$ -orbital flat band 与宋老师框架在“平带来自 kernel”这一点上非常接近。但它通常不是宋老师意义下的 CTFB。原因有三点。

第一，它通常没有通过 symmetry indicator 设计 stable topology。第二，它没有引入类似  $\Delta B$  的 zero-rank virtual representation 来控制 touching point。第三，projector  $P(\mathbf{k})$  在 touching point 不保证满足 CTFB 所需的 continuous but non-analytic 条件。

所以它更像

conventional exact flat band or singular flat band,

而宋老师的贡献是把这种 exact flat band 的 kernel 思想升级为

stable topological exact flat band.

	吴从军 $p$ -orbital flat band	宋志达 CTFB
平带机制	orbital directional hopping 与 destructive interference	$\ker S^\dagger(\mathbf{k})$
flatness	exact	exact
hopping range	finite range	finite range
topology	通常不是 stable topology	stable topology by SI
touching	常有 touching	设计好的 critical touching
projector	不保证连续	continuous but non-analytic
强关联意义	flat-band ferromagnetism/orbital order	CTFB/TNS/FCI 起点

## 15 物理图像总结

宋老师的构造可以用一条链条概括：

$$\begin{aligned} \text{topological symmetry data } B &\Rightarrow \Delta B \Rightarrow B + \Delta B = BR_L \boxplus BR_{\tilde{L}} \\ &\Rightarrow S^\dagger(\mathbf{k}) \Rightarrow \ker S^\dagger(\mathbf{k}) \Rightarrow \text{CTFB}. \end{aligned}$$

其中：

$B$  携带目标 stable topology,

$\Delta B$  把 topology obstruction 放到 touching point,

$BR_L \boxplus BR_{\tilde{L}}$  保证有局域 bipartite 实现,

$\ker S^\dagger(\mathbf{k})$  保证 exact flatness,

$P(\mathbf{k})$  连续但非解析 保证 topology well-defined 且 no-go 被饱和.

最短版理解:

bipartite kernel 负责平, symmetry indicator 负责拓扑,  
 $\Delta B$  负责 touching, non-analytic  $P(\mathbf{k})$  负责绕开 no-go。

## 16 可以问宋老师的问题

1.

$$B + \Delta B = BR_L \boxplus BR_{\tilde{L}}$$

是否可以理解为  $S^\dagger(\mathbf{k})$  的 equivariant index? 在这个意义下, CTFB 是否对应一个 kernel bundle 的 family-index construction?

2.  $\Delta B$  是否可以更数学地定义为 touching point 的 local index defect? 它与  $\ker S^\dagger$  和  $\text{coker} S^\dagger$  的局域失配是否有直接对应?
3. CTFB 的 criticality 对 fractional Chern insulator 是帮助还是破坏? 幂律相关与部分填充相互作用投影之间有什么关系?
4. CTFB 的 quantum geometry 与 ideal Landau level geometry 相比如何? 是否存在类似 ideal isotropic FCI condition 的判据?
5. 普通 destructive-interference flat band, 例如 Kagome、Lieb、dice 或  $p$ -orbital honeycomb flat band, 是否可以系统性地通过加入合适  $\Delta B$  和 symmetry constraints 升级成 CTFB?

## References

### 参考文献

- [1] Y.-Q. Li, Y.-J. Wang, P.-H. Lin, B. Wang, and Z.-D. Song, *Stable Topology in Exactly Flat Bands*, arXiv:2603.12258.
- [2] L. Chen, T. Mazaheri, A. Seidel, and X. Tang, *The impossibility of exactly flat non-trivial Chern bands in strictly local periodic tight binding models*, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 152001 (2014).
- [3] J. Dubail and N. Read, *Tensor network trial states for chiral topological phases in two dimensions and a no-go theorem in any dimension*, Phys. Rev. B **92**, 205307 (2015).

- [4] T. B. Wahl, H.-H. Tu, N. Schuch, and J. I. Cirac, *Projected Entangled-Pair States Can Describe Chiral Topological States*, Phys. Rev. Lett. **111**, 236805 (2013).
- [5] C. Wu, D. Bergman, L. Balents, and S. Das Sarma, *Flat Bands and Wigner Crystallization in the Honeycomb Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **99**, 070401 (2007).