

Youichi Yanase 报告笔记: [0.3em] Electric Current-Induced Superconductivity and Perfect Superconducting Diode[0.3em] 从 superconducting diode effect、finite-momentum Cooper pair 到 perfect SDE 与 current-induced zero-resistance state

根据报告现场线索与相关文献整理

2026 年 6 月 27 日

关键词

超导二极管效应; 非互易临界电流; 有限中心动量 Cooper 对; Rashba 自旋轨道耦合; Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov 态; 耗散诱导单向超导; valley-polarized moir'e 超导; photon-induced SDE; 强关联竞争序。

目录

1	从实验现象出发: 什么是 superconducting diode effect ?	3
2	Extrinsic 与 intrinsic: 从涡旋非对称到本征退配对	3
3	对称性: 为什么需要同时破坏 P 与 T ?	4
4	Rashba model: SOC 如何诱导有限中心动量 Cooper 对 ?	5
4.1	Mean-field 自洽场过程	5
5	经典 FFLO: 从 Pauli limit 到有限动量配对	6
5.1	BCS 为什么天然选择零总动量?	6
5.2	Zeeman 场造成 Fermi-surface mismatch	7
5.3	有限动量如何修复配对相空间?	7
5.4	FF 态与 LO 态: 相位调制还是幅度调制?	8
5.5	Pair susceptibility 判据: 为什么最大值会跑到有限 q ?	9
5.6	FFLO 为什么难以实现?	9
5.7	从经典 FFLO 到现代 finite-momentum superconductivity	10
6	Liang Fu 的观点: SDE 是 finite-momentum superconductivity 的运输指纹	11
7	Daido-Yanase 2025 PRB: bilayer dissipation route 与 perfect SDE	11
8	Daido-Yanase-Law 2025 PRL: trigonal FF 与 current-induced zero resistance	12
9	Photon-induced SDE: 光场如何重塑 dc 超流 ?	14

目录	2
10 Electron-correlation route: 电流诱导竞争磁序	14
11 几条机制的统一比较	15
12 未来可做的课题方向	15
12.1 Angular SDE tomography: 反推 finite-momentum Cooper pair	15
12.2 Bilayer perfect SDE 的 Keldysh / stochastic TDGL 理论	15
12.3 Moir'e valley FF domain physics	16
12.4 Strong-correlation SDE 与 supercurrent-induced competing order	16
12.5 Quantum geometry, flat band 与 topological Josephson diode	16
结语	16

1 从实验现象出发：什么是 superconducting diode effect ?

Superconducting diode effect (超导二极管效应, SDE) 指的是超导体的正、反方向退配对临界电流不同。若沿某一方向的电流仍可无耗散通过, 而反向电流已经使体系进入有阻态, 就得到超导版的整流效应。最常用的定义是

$$I_c^+ \neq |I_c^-|, \quad \eta = \frac{I_c^+ - |I_c^-|}{I_c^+ + |I_c^-|}. \quad (1)$$

这里 I_c^+ 是正向临界电流, $I_c^- < 0$ 是反向临界电流。普通 SDE 只有 $0 < |\eta| < 1$, 而 perfect SDE (完美超导二极管效应) 要求

$$I_c^+ > 0, \quad |I_c^-| = 0, \quad (2)$$

或反过来, 因此 $|\eta| = 1$ 。这不是“左右差很多”, 而是某一方向根本没有稳定的零电阻超导窗口。

核心物理图像

普通 SDE 是“同一个超导态对正反电流的破坏阈值不同”。Perfect SDE 更强: 稳定超导支只剩一个方向。Current-induced superconductivity (电流诱导超导) 或 current-induced zero-resistance state (电流诱导零电阻态) 更反直觉: 有限方向电流不是破坏超导, 而是选择、稳定或重建全局零电阻通道。

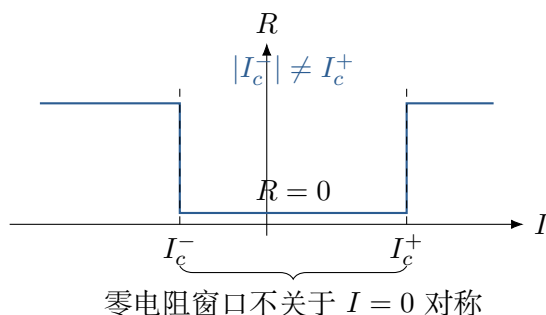


图 1: 普通 SDE 的示意: 零电阻区间 (I_c^-, I_c^+) 不再关于零电流对称。Perfect SDE 是其中一侧边界被推到零的极限。

2020 年 Ando 等人在无反演中心的人工超晶格 $[\text{Nb}/\text{V}/\text{Ta}]_n$ 中观测到磁场可控的 SDE[2]。这篇实验点燃了后来的 intrinsic SDE 理论: 临界电流的非互易性不一定来自器件几何或涡旋 pinning, 也可能来自均匀超导体自身的退配对机制。

2 Extrinsic 与 intrinsic: 从涡旋非对称到本征退配对

早在 1994 年, Ichikawa 等已经在 Nb 与 YBCO 薄膜中讨论过平行磁场下正反方向输运电流对应的临界电流非对称 [1]。这类现象通常与 vortex entry/exit (涡旋进入与退出)、Bean-

Livingston barrier、边界势垒、样品几何和 pinning 有关，因此可以称为 extrinsic SDE（外在机制）。

2020 年 Nature 实验的关键进步是人工构造了非中心对称的 $[\text{Nb}/\text{V}/\text{Ta}]_n$ 超晶格，并用磁场破坏时间反演，对临界电流非互易性进行系统调控 [2]。这使得理论上自然追问：如果没有边界势垒和涡旋 pinning，均匀超导体的 depairing current（退配对临界电流）本身能否非互易？Daido–Ikeda–Yanase 的 2022 PRL 正是这个问题的回答 [3]。

容易混淆

Extrinsic SDE 不是“不重要”。真实实验中的涡旋、边界、phase slip、thermal activation 都会影响 I_c^\pm 。Intrinsic SDE 的价值在于：即使在理想均匀体系中，Cooper 对被超流动量撕裂的阈值也可以正反不等。实际样品往往是两类机制的叠加。

3 对称性：为什么需要同时破坏 P 与 T ？

把带流动动量的超导序参量写作

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_q e^{iqx}. \quad (3)$$

在 Ginzburg–Landau (GL) 层面，考虑一维流动方向的自由能 $F(q)$ 。电流为

$$j(q) = 2e, \partial_q F(q). \quad (4)$$

若体系有反演 P ，则 $q \rightarrow -q$ ，通常要求 $F(q) = F(-q)$ 。若体系有时间反演 T ，平衡电流也受到强约束。要让正反方向退配对边界不同，最少需要允许 q 的奇次非线性项在有效自由能中出现。

关键公式

一个最小的一维 GL 展开是

$$F(q) = F_0 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4 + \dots, \quad j(q) = 2e (a_1 + 2a_2 q + 3a_3 q^2 + 4a_4 q^3 + \dots). \quad (5)$$

线性项 $a_1 q$ 主要把自由能极小值移到有限 q_0 ；真正使正反 depairing boundary 不对称的，通常是高阶奇次项与 $\Delta(q)$ 的非线性自洽变化。

需要特别强调的是，有限 Cooper-pair momentum 与平衡电流不是同一件事。若自由能最低点在 $q = q_0$ ，则

$$\partial_q F(q)|_{q=q_0} = 0, \quad j(q_0) = 0. \quad (6)$$

因此 helical superconductivity（螺旋超导）或 Fulde–Ferrell-like state 可以有 $q_0 \neq 0$ ，但平衡态仍然没有净电流。SDE 发生在外加 supercurrent 把 q 从 q_0 往正反方向推开时。

4 Rashba model: SOC 如何诱导有限中心动量 Cooper 对?

考虑二维非中心对称超导体。正常态 Hamiltonian 可写为

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} [\xi_{\mathbf{k}} \sigma_0 + \alpha, \mathbf{g}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mu_B \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}] c_{\mathbf{k}}. \quad (7)$$

Rashba 情形可取

$$\mathbf{g}(\mathbf{k}) = (k_y, -k_x, 0), \quad (8)$$

或晶格版本 $\mathbf{g}(\mathbf{k}) = (-\sin k_y, \sin k_x, 0)$ 。SOC 的作用不是“制造超导”，而是制造 spin-momentum locking (自旋-动量锁定)。没有磁场时， \mathbf{k} 与 $-\mathbf{k}$ 的 Kramers 伙伴仍可零动量配对。加面内 Zeeman 场后，helicity Fermi surfaces 被推歪，零动量配对不再最优，体系选择

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{q}_0 \propto \hat{z} \times \mathbf{H}. \quad (9)$$

这就是 Rashba helical superconductivity，也可看成 FF-like 有限动量配对。

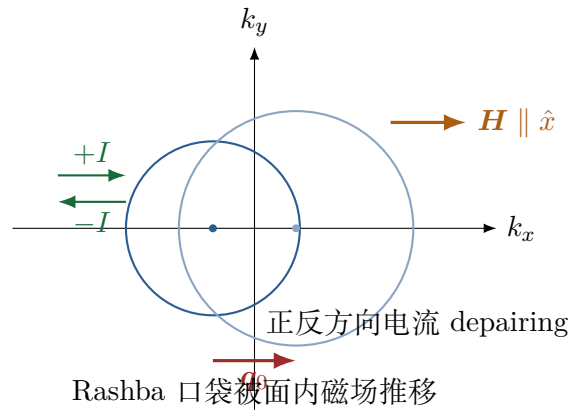


图 2: Rashba spin-momentum locking 把面内 Zeeman 场转化成 helicity Fermi surfaces 的动量偏移，进而诱导有限 \mathbf{q}_0 Cooper 对。

4.1 Mean-field 自洽场过程

从吸引相互作用出发，例如

$$H_{\text{int}} = -U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, \quad U > 0. \quad (10)$$

允许有限中心动量配对，定义

$$\Delta_{\mathbf{q}} = U \sum_{\mathbf{k}} \langle c_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \downarrow} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \uparrow} \rangle. \quad (11)$$

用 Nambu spinor

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\uparrow} & c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\downarrow} & c_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\uparrow}^\dagger & c_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (12)$$

得到 BdG Hamiltonian

$$\mathcal{H}_{\text{BdG}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} h(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2) & \Delta_{\mathbf{q}} i\sigma_y & -\Delta_{\mathbf{q}}^* i\sigma_y & -h^T(-\mathbf{k} + \mathbf{q}/2) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中

$$h(\mathbf{k}) = \xi_{\mathbf{k}} \sigma_0 + \alpha \mathbf{g}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mu_B \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (14)$$

对给定 \mathbf{q} , 对角化 \mathcal{H}_{BdG} , 求解 gap equation 得到 $\Delta(\mathbf{q})$, 再计算热力学势 $\Omega[\Delta(\mathbf{q}), \mathbf{q}]$. 电流为

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}) = 2e, \partial_{\mathbf{q}} \Omega[\Delta(\mathbf{q}), \mathbf{q}]. \quad (15)$$

于是

$$I_c^+ = \max_q j(q), \quad I_c^- = \min_q j(q). \quad (16)$$

Daido–Ikeda–Yanase 强调, 低温下非互易 depairing current 可显著增强, 并可随磁场发生符号反转, 这反映了 Landau critical momentum 的非互易性以及 helical superconducting state 性质的改变 [3].

5 经典 FFLO: 从 Pauli limit 到有限动量配对

这一节是理解 Yanase 报告后半部分的前置知识。报告中出现的 helical superconductivity、trigonal Fulde–Ferrell superconductors、current-induced zero-resistance state, 本质上都在使用同一个概念: Cooper pair 不一定凝聚在零总动量, 而可以凝聚在有限中心动量。经典 FFLO 是这个想法最早、最清楚的弱耦合版本。

5.1 BCS 为什么天然选择零总动量?

普通 BCS 超导中, 最容易配对的是动量相反、能量相等的两个电子。没有磁场、没有自旋极化时, 时间反演把 (\mathbf{k}, \uparrow) 变成 $(-\mathbf{k}, \downarrow)$, 二者在费米面附近严格简并。因此 Cooper pair 的总动量为零:

$$(\mathbf{k}, \uparrow) + (-\mathbf{k}, \downarrow) = 0. \quad (17)$$

对应的实空间序参量是均匀的:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0. \quad (18)$$

这个均匀性不是额外假设, 而是费米面配对几何决定的结果。只要两种配对粒子的费米面完全重合, 零动量配对就能最大化配对相空间。

5.2 Zeeman 场造成 Fermi-surface mismatch

加上磁场后, 磁场会通过两种方式破坏超导。第一种是 orbital effect (轨道效应), 即 Lorentz force 造成轨道运动、涡旋和 Landau 量子化。第二种是 Pauli effect (Pauli 顺磁破坏), 即 Zeeman splitting 直接劈裂自旋能级。FFLO 关心的是第二种机制。

若只保留 Zeeman 能量 $h = \mu_B H$, 单粒子色散可写成

$$\xi_{k\uparrow} = \xi_k - h, \quad \xi_{k\downarrow} = \xi_k + h. \quad (19)$$

于是上、下自旋的费米面半径不同。对抛物线色散, 在弱场近似下

$$k_{F\uparrow} - k_{F\downarrow} \simeq \frac{2h}{v_F}. \quad (20)$$

这就是 Fermi-surface mismatch (费米面失配)。如果仍然把 (\mathbf{k}, \uparrow) 与 $(-\mathbf{k}, \downarrow)$ 配成零动量 Cooper pair, 那么两者通常不能同时位于各自的费米面上。一个电子需要离开自己的费米面, 付出约 h 量级的能量代价。因此磁场增加时, 均匀 BCS 态最终会被 Pauli pair breaking 破坏。Clogston–Chandrasekhar limit 描述的就是 Zeeman 极化能与 BCS 凝聚能之间的竞争 [13, 14]。

容易混淆

FFLO 的出发点不是“磁场让超导动起来”, 而是“磁场让原本可以零动量配对的两个费米面错开”。有限动量 \mathbf{q} 是体系为了重新贴合两个错开的费米面而选择的补偿动量。

5.3 有限动量如何修复配对相空间?

FFLO 的关键想法是把配对方式改成

$$\left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \uparrow\right), \quad \left(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \downarrow\right). \quad (21)$$

这两个电子的总动量是

$$\left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) + \left(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) = \mathbf{q}. \quad (22)$$

若选择合适的 \mathbf{q} , 两电子可以在某些费米面 patches 上同时接近各自费米面。最简单估计是让 \mathbf{q} 补偿两个费米半径之差:

$$q \simeq k_{F\uparrow} - k_{F\downarrow} \simeq \frac{2h}{v_F}. \quad (23)$$

这个估计非常重要。它说明 FFLO 的波长大约为

$$\lambda_{\text{FFLO}} \sim \frac{2\pi}{q} \sim \frac{\pi v_F}{h}. \quad (24)$$

磁场越强，费米面错位越大，有限动量越大，实空间调制周期越短。

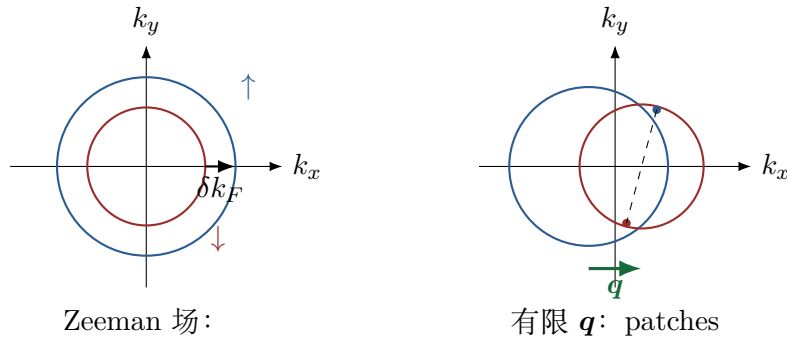


图 3: 经典 FFLO 的费米面图像。Zeeman splitting 使上、下自旋费米面半径不同。有限中心动量 q 不能让整个费米面都匹配，但可以恢复一部分 patches 的配对相空间。

5.4 FF 态与 LO 态: 相位调制还是幅度调制?

Fulde-Ferrell 态的序参量是单个平面波 [11]:

$$\Delta_{\text{FF}}(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (25)$$

它的幅度 $|\Delta_{\text{FF}}|$ 是常数，空间依赖只在相位上。因此 FF 态可以理解为带有均匀相位梯度的有限动量凝聚。若只看序参量幅度，它并没有节点。

Larkin-Ovchinnikov 态则通常写成两个相反动量分量的叠加 [12]:

$$\Delta_{\text{LO}}(\mathbf{r}) = \Delta_{+q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + \Delta_{-q} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (26)$$

若 $\Delta_{+q} = \Delta_{-q} = \Delta_0$ ，则

$$\Delta_{\text{LO}}(\mathbf{r}) = 2\Delta_0 \cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}). \quad (27)$$

LO 态有幅度节点。节点附近超导能隙小，可以容纳 Zeeman 场偏好的未配对自旋极化准粒子。因此在很多弱耦合平衡理论中，LO 态比单一 FF plane wave 更稳定。

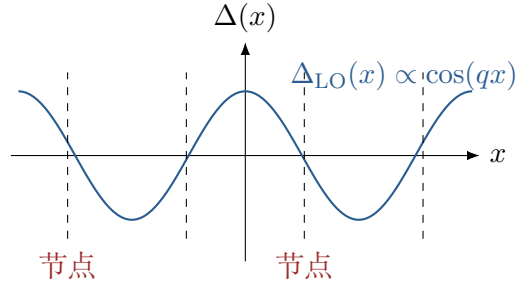


图 4: LO 态的实空间图像。序参量幅度发生调制并出现节点, 节点附近可以容纳未配对的极化准粒子。

关键公式

FF 与 LO 的最简区别是

$$\text{FF: } \Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad |\Delta(\mathbf{r})| = \Delta_0, \quad \text{LO: } \Delta(\mathbf{r}) = 2\Delta_0 \cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}), \quad |\Delta(\mathbf{r})| \text{ 有节点.} \quad (28)$$

FF 是相位调制; LO 是幅度调制。实际 FFLO 相还可以是多个 \mathbf{q} 分量组成的晶格态。

5.5 Pair susceptibility 判据: 为什么最大值会跑到有限 q ?

更现代、也更适合连接 Yanase 报告的表述, 是考察 Cooper channel 的 pairing susceptibility $\chi(\mathbf{q})$ 。在线性化 gap equation 中, 超导转变首先发生在使 $\chi(\mathbf{q})$ 最大的动量处。若最大值在 $\mathbf{q} = 0$, 得到普通 BCS 态; 若最大值在 $\mathbf{q} = \mathbf{Q} \neq 0$, 就得到有限动量配对。

形式上可写为

$$1 = U, \chi(\mathbf{q}, T_c), \quad (29)$$

其中 U 是有效吸引相互作用。对给定 T , 最先满足这个条件的 \mathbf{q} 就是凝聚动量。Zeeman splitting 造成费米面失配后, $\chi(\mathbf{q})$ 的最大值可能从 $q = 0$ 移到 $q \simeq 2h/v_F$ 。这句话统一了经典 FFLO、Rashba helical SC 和 valley-polarized trigonal FF: 它们的共同结构都是 $\chi(\mathbf{q})$ 在有限 \mathbf{q} 处变大, 只是造成失配的微观机制不同。

5.6 FFLO 为什么难以实现?

经典 FFLO 的条件非常苛刻:

- Pauli pair breaking 必须强, 即 Zeeman splitting 是主要破坏机制。
- Orbital pair breaking 必须弱, 否则体系先进入普通涡旋态或被轨道效应破坏。
- 样品必须足够干净, 因为杂质散射会平均掉空间调制的相位结构。
- 温度通常要低, 传统弱耦合理论中 FFLO 只在低温高场区域出现。

常用的经验条件是 Maki 参数足够大:

$$\alpha_M = \sqrt{2} \frac{H_{c2}^{\text{orb}}}{H_P} \gtrsim 1.8. \quad (30)$$

这里 H_{c2}^{orb} 是轨道限制上临界场, H_P 是 Pauli 限制场。若 α_M 小, 说明轨道效应先破坏超导, FFLO 难以出现。若平均自由程 ℓ 小于相干长度 ξ , 即 $\ell \lesssim \xi$, 杂质也会强烈抑制 FFLO。经典候选材料因此多为准二维有机超导、重费米子超导 CeCoIn_5 、低维冷原子体系等 [15, 16]。

容易混淆

“有 Zeeman splitting” 并不自动意味着 “有 FFLO”。FFLO 要求体系在被磁场彻底杀死之前, 仍有机会通过有限 q 恢复一部分配对相空间。因此它喜欢低维、强 Pauli limit、弱 orbital effect 和 clean limit。

5.7 从经典 FFLO 到现代 finite-momentum superconductivity

Yanase 报告中的有限动量配对比经典 FFLO 更宽泛。现代语境下, finite-momentum superconductivity 可以由许多机制产生:

机制	费米面或配对几何如何失配	典型物理后果
		Zeeman FFLO
$k_{F\uparrow} \neq k_{F\downarrow}$	FF 或 LO 调制态 Rashba helical SC	SOC 与面内磁场推移 helicity pockets
$\mathbf{q}_0 \propto \hat{z} \times \mathbf{H}$, SDE Ising/orbital FFLO	Ising SOC 改变 Pauli 与 orbital pair breaking	高场二维超导调制态 Valley-polarized FF
valley polarization 与 trigonal warping 改变 nesting PDW、vestigial order、竞争序	三个 C_3 相关 FF domains correlation PDW	条纹、磁性、CDW、Mott 物理诱导有限 Q 配对

因此可以把 FFLO 看成 pair-density wave (PDW) 的一种弱耦合版本。PDW 的定义更广: 只要超导序参量在有限波矢处凝聚, 就可称为 PDW。经典 LO 态是 PDW; 但强关联体系中的 PDW 未必来自 Zeeman 费米面失配, 也可能来自条纹、反铁磁涨落、Mott 背景或多轨道相互作用 [18]。

核心物理图像

本报告后面所有 “finite-momentum Cooper pair” 的物理都可以用一句话抓住: 某种机制使零动量配对不再最优, 于是 pairing susceptibility 的峰从 $q = 0$ 移到 $q = Q \neq 0$ 。SDE 进一步要求 Q 与 $-Q$ 在对称性或稳定性上不等价。

6 Liang Fu 的观点: SDE 是 finite-momentum superconductivity 的输运指纹

Yuan-Fu 的 PNAS 文章提出一个非常清楚的观点: 在有 antisymmetric spin-orbit coupling 的二维超导体中, 面内磁场可诱导 finite Cooper-pair momentum, 而沿此 momentum 正反方向的 depairing critical currents 不同 [5]。因此 SDE 可作为 helical superconductivity 或 finite-momentum superconductivity 的输运诊断。

这条逻辑可以压缩为

$$\text{Rashba SOC} + \text{面内磁场} \Rightarrow \mathbf{q}_0 \neq 0 \Rightarrow j_c(+\mathbf{q}_0) \neq j_c(-\mathbf{q}_0). \quad (31)$$

从 quasiparticle 角度看, 正向与反向 supercurrent 关闭 gap 的方式不同, 可能涉及不同 helicity pockets, 因此临界电流不再互为相反数。

Fu 组的 Josephson 版本进一步指出, 短 Josephson junction 中有限 Cooper pair momentum 会通过 Andreev bound states 的 Doppler shift 与 continuum current 造成非互易 Josephson critical current, 且这个机制相当普适 [6]。

7 Daido-Yanase 2025 PRB: bilayer dissipation route 与 perfect SDE

Yanase 报告中 perfect SDE 的一个核心理论是 Daido-Yanase 2025 PRB[7]。这个理论最好理解成一个“相位齿轮”: 垂直耗散电场制造上下层相位滞后, 面内反演相关对称性破缺把这个层间相位差转换成面内 Cooper-pair momentum 偏移。

考虑双层序参量

$$\psi = (\psi_1, \psi_2)^T. \quad (32)$$

在 layer space 中, GL kernel 写作

$$\hat{\alpha}(q) = \alpha_0(q)\sigma_0 + \alpha_x(q)\sigma_x + \alpha_y(q)\sigma_y + \alpha_z(q)\sigma_z. \quad (33)$$

最小模型为

$$\alpha_0(q) = a_0 + a_0''q^2, \quad \alpha_x(q) = a_x, \quad \alpha_y(q) = a_y'q, \quad \alpha_z(q) = 0. \quad (34)$$

其中 $a_y'q\sigma_y$ 是关键项: 它说明面内 Cooper-pair momentum q 与层间相位结构耦合。若没有相应的面内 inversion-related symmetry breaking, 这个线性项会被禁止。

加入垂直电场 E_\perp , 上下层 scalar potential 不同。TDGL 方程变成

$$[\partial_t + i\Phi]\psi = -[\hat{\alpha}(q) + \beta_0|\psi|^2]\psi, \quad \Phi = -E\sigma_z. \quad (35)$$

这相当于一个非厄米的 nonequilibrium steady-state 问题。垂直电场造成层间相位滞后

$$\theta_E \sim \frac{E}{|a_x|}, \quad (36)$$

而 a'_y 把它转换成面内动量偏移

$$q_E \propto a'_y E. \quad (37)$$

核心物理图像

Daido–Yanase bilayer 机制的核心链条是

$$E_{\perp} \longrightarrow \theta_1 - \theta_2 \longrightarrow q_E \longrightarrow j(q) \text{ 曲线偏移}. \quad (38)$$

垂直耗散不是简单加热，而是通过层间相位差重塑面内超流的稳定性。

稳态电流可写成

$$j_{\text{ss}}(q) = \frac{4N_0\xi_0^2}{\beta_0}(q - q_E)(|\bar{\epsilon}(E)| - \xi_0^2 q^2). \quad (39)$$

如果定义

$$q_* = \frac{\sqrt{|\bar{\epsilon}(E)|}}{\xi_0}, \quad (40)$$

则超导幅度存在窗口大致仍是 $|q| < q_*$ ，但电流零点从 $q = 0$ 被推到 $q = q_E$ 。这就是 perfect SDE 的几何图像：超导 dome 与零电流点错位。当 $|q_E|$ 接近或超过 dome 边缘时，current-biased 稳定支只剩一个方向。

容易混淆

这不是普通平衡 GL 自由能的极小值问题。垂直电场使 TDGL 成为非厄米动力学稳定性问题；perfect SDE 的本质是稳定 steady state 的单向性，而不是简单的 $F(q) \neq F(-q)$ 。

8 Daido–Yanase–Law 2025 PRL: trigonal FF 与 current-induced zero resistance

Daido–Yanase–Law 的 2025 PRL 研究 twisted trilayer graphene/WSe₂ 中的 current-induced zero-resistance state[8]。实验现象的奇特之处在于：小电流下体系有小但有限的电阻；足够大的某一方向电流反而诱导零电阻；反方向电流则不能。

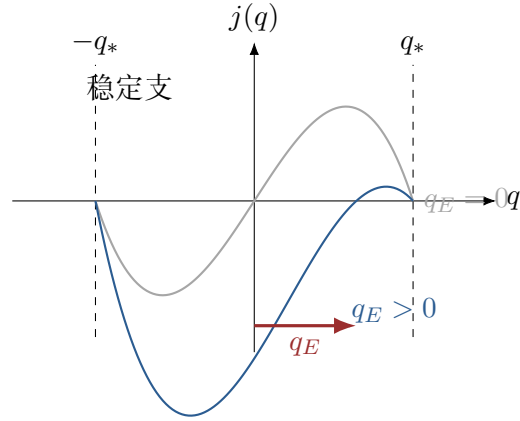


图 5: Bilayer dissipation route 的核心示意: 超导存在窗口仍在 $[-q_*, q_*]$, 但电流曲线的零点被垂直耗散推到 q_E 。当偏移足够大时, 一侧临界电流被推到零。

理论机制是

valley polarization + trigonal warping \Rightarrow 3 个 C_3 -related FF momenta Q_1, Q_2, Q_3 . (41)

序参量可写为

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_1 e^{iQ_1 \cdot \mathbf{r}} + \Delta_2 e^{iQ_2 \cdot \mathbf{r}} + \Delta_3 e^{iQ_3 \cdot \mathbf{r}}. \quad (42)$$

传统 FFLO 中, 人们常认为 LO 态更稳定, 因为 $\pm Q$ 可组成驻波并消除净流动趋势。这里不同: valley polarization 与 trigonal warping 打破了 $Q \leftrightarrow -Q$ 的简单等价性, 三个由 C_3 相关的 FF states 成为低能候选。

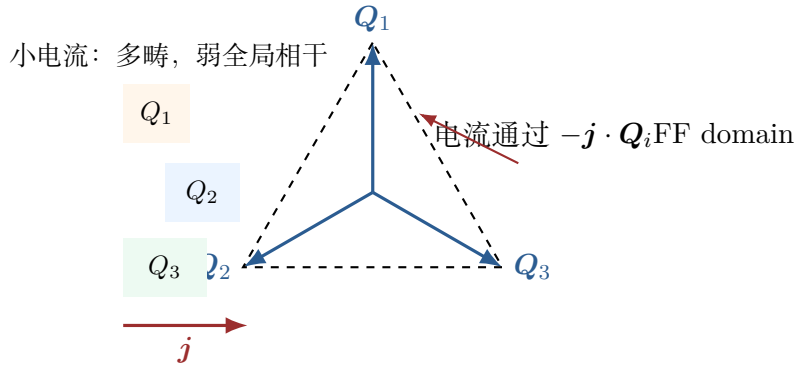


图 6: Valley-polarized trigonal FF 超导中的三重近简并 FF 动量。电流选择某一 domain, 可能形成 percolating zero-resistance path。

多畴态中, 不同 Q_i domain 之间 Josephson coupling 弱, domain wall 还可能携带涡旋或相位滑移, 因此小电流下有小电阻。大电流通过

$$-j \cdot Q_i \quad (43)$$

打破三重简并, 选择某个 FF domain。若形成单畴或贯穿样品的单畴通道, 体系就进入零电阻态。这是 current-induced zero resistance, 不只是普通 $I_c^+ \neq |I_c^-|$ 。

9 Photon-induced SDE: 光场如何重塑 dc 超流?

Ichikawa–Yanase 的 2026 预印本提出 light-driven intrinsic perfect SDE[9]。基本思想是: 光场通过规范耦合周期性摇动 Cooper-pair momentum,

$$q \longrightarrow q + A(t). \quad (44)$$

对于单频光,

$$A(t) = A_0 \sin \omega t. \quad (45)$$

在连续驱动下, TDGL 长时间行为进入周期 steady state, 于是可定义 dc supercurrent

$$j_{\text{dc}}(q) = \frac{1}{T} \int_0^T j(q, t), dt. \quad (46)$$

GL 展开中允许的奇次项, 例如

$$\alpha(q) = \alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \dots, \quad \beta(q) = \beta_0 + \beta_1 q + \dots, \quad (47)$$

会使光场的非线性整流留下 dc 非互易修正。文章强调, light-driven perfect SDE 中 α_3 尤其关键。更有意思的是双频光

$$A(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin(2\omega t + \varphi) \quad (48)$$

可以通过 dynamical symmetry breaking, 在中心反演体系中也诱导 perfect SDE。

核心物理图像

Bilayer route 用 dc 耗散改变 steady-state 稳定性; light-driven route 用 ac 光场的非线性整流与动态对称性工程重塑 $j_{\text{dc}}(q)$ 。二者都说明 perfect SDE 往往不是平衡态小修正, 而是接近稳定性边界时的非线性现象。

10 Electron-correlation route: 电流诱导竞争磁序

Nakamura–Yanase 2026 的工作讨论强关联电子体系中的 SDE[10]。在 Rashba–Zeeman–Hubbard 模型接近反铁磁量子临界区域时, 普通 intrinsic depairing-current SDE 可能被强关联重整甚至压制; 但 supercurrent 可以非互易地诱导 antiferromagnetic order (AFM), 而 AFM 与超导竞争, 最终支配临界电流。

一个简单的 Landau 图像是

$$F[\Delta, M, q] = F_{\text{SC}}(\Delta, q) + r_M M^2 + u_M M^4 + g M^2 |\Delta|^2 + \lambda q M |\Delta|^2 + \dots \quad (49)$$

当 $r_M \approx 0$ 时, 体系接近磁量子临界点, 小的 q 就能诱导很大的 $M(q)$ 。若 $q \rightarrow -q$ 的诱导不对称, 则一个方向电流会触发 AFM 并摧毁超导, 另一个方向不触发竞争序, 从而得到 perfect SDE。

听报告时要抓住的问题

强关联 route 的关键词不是“电流直接破坏 Cooper 对”, 而是“电流先诱导竞争序, 竞争序再杀死超导”。这为超导二极管提供了一个探测 supercurrent-induced competing order 的新窗口。

11 几条机制的统一比较

机制	关键自由度	perfect 或 extreme 非互易来源 Intrinsic Rashba SDE
finite q_0 、helicity pocket、depairing current	$j(q)$ 左右不对称; 通常 $ \eta < 1$, 但低温可增强并符号反转 Bi-layer dissipation	layer phase difference、非厄米 TDGL
$j(q)$ 零点被推到超导 dome 边缘, 一侧稳定支消失 Trigonal FF CIZR	三个 C_3 -related FF domains	电流选择 FF domain, 多畴有限电阻转为单畴零电阻 Light-driven SDE
$q + A(t)$ 、非线性 optical response 电流非互易诱导竞争序, 竞争序摧毁一侧超导	光场重塑 $j_{\text{dc}}(q)$, 双频光可动态破缺对称性 Correlation route	AFM/nematic/CDW 等竞争序

12 未来可做的课题方向

12.1 Angular SDE tomography: 反推 finite-momentum Cooper pair

问题是能否从 $I_c^+(\theta, B, T)$ 与 $I_c^-(\theta, B, T)$ 的角分辨数据反推出 q_0 。可从点群对称性出发写 GL 函数 $F(\mathbf{q}, \mathbf{H})$, 再计算非互易临界电流的角依赖。可观测量包括 $\eta(\theta)$ 、符号反转线、non-reciprocal transition line。这个方向把 SDE 从器件效应变成 finite-momentum superconductivity 的 spectroscopy。

12.2 Bilayer perfect SDE 的 Keldysh / stochastic TDGL 理论

Daido-Yanase 的 TDGL 是干净的平均场图像。真实二维体系有 heating、phase slip、vortex、normal quasiparticle current 与噪声。可建立 stochastic TDGL 或 Keldysh GL action, 计算有

限温度下 $V(I)$ 、phase-slip rate、noise spectrum 与 100

12.3 Moir'e valley FF domain physics

在 trigonal FF 图像中,真正决定 CIZR 的是 domain wall、pinning、percolation 与 hysteresis。可建立三分量 GL 模型

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \Delta_i e^{i\mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (50)$$

并加入随机场、边界 pinning 与外加电流项 $-\mathbf{j} \cdot \mathbf{Q}_i$ 。可观测量包括 $R(I, \theta)$ 、hysteresis loop、低频噪声、domain switching threshold。

12.4 Strong-correlation SDE 与 supercurrent-induced competing order

可把 AFM 推广到 nematic、CDW、loop-current order 或 PDW, 研究 supercurrent 是否能非互易地诱导竞争序。模型可以从 Hubbard、Rashba–Hubbard、Kagome 或 moir'e narrow-band 模型出发,也可以先做 Landau theory。可观测量包括 magnetic Bragg signal、Kerr rotation、nematic transport anisotropy 与 SDE 同步出现的临界行为。

12.5 Quantum geometry、flat band 与 topological Josephson diode

在 flat / narrow band 超导中, Berry curvature、quantum metric 与 form factor 可能强烈影响 superfluid stiffness、pair susceptibility $\chi(\mathbf{q})$ 与 finite- q pairing。可以研究

$$D_s(\mathbf{q}), \quad \chi_{\text{pair}}(\mathbf{q}), \quad I_c^\pm \quad (51)$$

如何依赖量子几何。这个方向有望连接 moir'e superconductivity、topological Josephson diode 与量子几何诱导超导。

结语

Yanase 报告的主线可以概括为: SDE 最初是正反临界电流不等的现象,但其理论意义已经超出整流器件。它正在成为 finite-momentum Cooper pair、非平衡超导稳定性、valley/moir'e domain、photon-driven nonlinear response 与强关联竞争序的共同探针。

关键公式

一条总公式是

$$\text{symmetry breaking} + \text{finite } q + \text{nonlinear stability} \implies I_c^+ \neq |I_c^-|, \quad (52)$$

而 perfect SDE 要求更强: 一侧稳定超导支被完全消除。理解这个“稳定支如何消失”,就是当前理论的核心问题。

参考文献

- [1] F. Ichikawa, T. Nishizaki, K. Yamabe, Y. Yamasaki, T. Fukami, and T. Aomine, “Asymmetric critical currents of Nb and YBCO thin films for the polarity of the transport current in parallel magnetic fields,” *Physica C* **235–240**, 3095–3096 (1994).
- [2] F. Ando, Y. Miyasaka, T. Li, J. Ishizuka, T. Arakawa, Y. Shiota, T. Moriyama, Y. Yanase, and T. Ono, “Observation of superconducting diode effect,” *Nature* **584**, 373–376 (2020).
- [3] A. Daido, Y. Ikeda, and Y. Yanase, “Intrinsic Superconducting Diode Effect,” *Phys. Rev. Lett.* **128**, 037001 (2022); arXiv:2106.03326.
- [4] A. Daido and Y. Yanase, “Superconducting diode effect and nonreciprocal transition lines,” *Phys. Rev. B* **106**, 205206 (2022); arXiv:2209.03515.
- [5] N. F. Q. Yuan and L. Fu, “Supercurrent diode effect and finite-momentum superconductors,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **119**, e2119548119 (2022); arXiv:2106.01909.
- [6] M. Davydova, S. Prembabu, and L. Fu, “Universal Josephson diode effect,” *Sci. Adv.* **8**, eabo0309 (2022); arXiv:2201.00831.
- [7] A. Daido and Y. Yanase, “Unidirectional superconductivity and superconducting diode effect induced by dissipation,” *Phys. Rev. B* **111**, L020508 (2025); arXiv:2310.02539.
- [8] A. Daido, Y. Yanase, and K. T. Law, “Nonreciprocal Current-Induced Zero-Resistance State in Valley-Polarized Superconductors,” *Phys. Rev. Lett.* **135**, 236001 (2025); arXiv:2503.16923.
- [9] M. Ichikawa and Y. Yanase, “Light-Driven Intrinsic Perfect Superconducting Diode Effect,” arXiv:2605.25197 (2026).
- [10] K. Nakamura and Y. Yanase, “Superconducting diode effect in correlated electron systems by nonreciprocal magnetism,” arXiv:2605.00601 (2026).
- [11] P. Fulde and R. A. Ferrell, “Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field,” *Phys. Rev.* **135**, A550–A563 (1964).
- [12] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, “Nonuniform state of superconductors,” *Sov. Phys. JETP* **20**, 762–769 (1965).
- [13] A. M. Clogston, “Upper Limit for the Critical Field in Hard Superconductors,” *Phys. Rev. Lett.* **9**, 266–267 (1962).
- [14] B. S. Chandrasekhar, “A note on the maximum critical field of high-field superconductors,” *Appl. Phys. Lett.* **1**, 7–8 (1962).
- [15] R. Casalbuoni and G. Nardulli, “Inhomogeneous superconductivity in condensed matter and QCD,” *Rev. Mod. Phys.* **76**, 263–320 (2004).

- [16] Y. Matsuda and H. Shimahara, “Fulde–Ferrell–Larkin–Ovchinnikov state in heavy fermion superconductors,” *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**, 051005 (2007).
- [17] A. I. Buzdin, “Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures,” *Rev. Mod. Phys.* **77**, 935–976 (2005).
- [18] D. F. Agterberg, J. C. S’eamus Davis, S. D. Edkins, E. Fradkin, D. J. Van Harlingen, S. A. Kivelson, P. A. Lee, L. Radzihovsky, J. M. Tranquada, and Y. Wang, “The physics of pair-density waves: cuprate superconductors and beyond,” *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **11**, 231–270 (2020).
- [19] H. Narita, J. Ishizuka, R. Kawarazaki, D. Kan, Y. Shiota, T. Moriyama, Y. Shimakawa, A. V. Ognev, A. S. Samardak, Y. Yanase, and T. Ono, “Field-free superconducting diode effect in noncentrosymmetric superconductor/ferromagnet multilayers,” *Nat. Nanotechnol.* **17**, 823–828 (2022); arXiv:2206.00483.
- [20] B. Pal *et al.*, “Josephson diode effect from Cooper pair momentum in a topological semimetal,” *Nat. Phys.* **18**, 1228–1233 (2022).
- [21] Y. Hou *et al.*, “Ubiquitous superconducting diode effect in superconductor thin films,” *Phys. Rev. Lett.* **131**, 027001 (2023).
- [22] For a recent overview of theoretical developments, see for example review articles on theories of superconducting diode effects and nonreciprocal superconducting transport.