量 子 场 论　量 子 力 学 与 狭 义 相 对 论

本章建立和描述 量子场论 中最基本的“量子”

王青

清华大学

2024年9月2日-12月20日

物理学基本单位

物理学的基本元素： 时间, 空间, 物质（能量） $\Rightarrow$ 三个物理学基本单位！

物理学基本理论：

- 狭义相对论： $c = 299792.458\ km\ s^{-1}$
- 量子力学： $\hbar = 6.5821220 \times 10^{-22}\ MeV\ s$
- c 和 $\hbar$ 的理论计算超出理论物理学的范畴！ 基本物理学常数随时间的变化?
- c由狭义相对论的光速不变假设给入！ $\hbar$是以时空转动生成元的量纲常数的方式引入?

自然单位制: 只有一个基本单位

- $c = 1$ 长度单位和时间单位关联起来 1秒=299792.458公里 $c=\infty$ $\Rightarrow$ 非相对论?
- $\hbar = 1$ 质量单位和时间单位关联起来 1秒$^{-1}$$=6.5821220\times10^{-22}$兆电子伏特 $\hbar=0$ $\Rightarrow$ 非量子力学?

$$10^{-15}\text{米} = 1\text{费米}^{-1} = 197.327053\text{兆电子伏特}$$

人的尺度～1米～1.97×10^{-7}eV; 原子尺度～ $1\AA=10^{-10}$米$=0.1$纳米～1.97keV; 质子尺度，电子经典半径～1费米$=10^{-15}$米～197MeV

物理学量纲的起源？ 维数转移! 没有基本物理单位 所有物理量都是无量纲的!

原理一: 物理状态用希尔伯特空间的态矢量描写. 相差一个复数因子的两个态矢量,描写同一物理状态.

希尔伯特空间:

- 它是∞维的复矢量空间
- 存在完备的基矢组
- 可以定义内积空间

物理态存在于含复数的空间！

态矢量是"抽象的东东"！

态矢量:

- 如果Φ和Ψ分别是希尔伯特空间的两个态矢量,那么,$\xi\Phi+\eta\Psi$也是这个空间的态矢量. 其中,ξ和η是两个任意复数.
- 对任意一对态矢量Φ和Ψ,存在复数内积(Φ,Ψ),满足:

$$(\Phi,\Psi)=(\Psi,\Phi)^*$$

$$(\Phi,\xi_1\Psi_1+\xi_2\Psi_2)=\xi_1(\Phi,\Psi_1)+\xi_2(\Phi,\Psi_2)$$

$$(\eta_1\Phi_1+\eta_2\Phi_2,\Psi)=\eta_1^*(\Phi_1,\Psi)+\eta_2^*(\Phi_2,\Psi)$$

$$(\Psi,\Psi)\geq 0 \qquad (\Psi,\Psi)=0 \xrightarrow{\text{当且仅当}} \Psi=0$$

希尔伯特空间

复矢量空间

元素(或称为矢量)$\{\psi, \phi, \chi, \cdots\}$的集合L在复数域C上定义了加法和数乘后,则称它为复矢量空间.

- **加法**: 在集合L中定义了加法运算.任意两个元素可以相加,相加之后的和仍是集合中的元素.加法满足交换律和结合律; 加法存在单位元0矢量,使得$\psi + 0 = \psi$;加法还存在逆元,若记$-\psi$为ψ的逆元,则:$\psi + (-\psi) = 0$.
- **数乘**: 集合L中的任一矢量与数域C上的复数相乘将得到集合内的另一矢量.对$\psi, \phi \subset L, a, b \subset C$, 数乘运算满足: $a(\psi + \phi) = a\psi + a\phi$, $(a+b)\psi = a\psi + b\psi$, $(ab)\psi = a(b\psi)$, $1\psi = \psi$, $0\psi = 0$.

完备的基矢组

- **线性无关**: 矢量集$\phi_i, i = 1, 2, \cdots, n$满足$\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i = 0$仅对所有$a_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$才成立.则称此n个矢量线性无关.
- **完备集**: n维矢量空间L中,n个线性无关的矢量集合称为L中的完备集. 空间中任一矢量都可表为此完备集的线性组合$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i$.
- **基矢**: n维矢量空间L中的任意一组完备集的n个线性无关的矢量称为此空间的基矢量.

内积空间

存在一个共轭空间,其中的每个矢量与原空间的矢量有一一对应关系,并且定义了内积运算:
$(\phi, \psi) = (\psi, \phi)^*$, $(\phi, \phi) \geq 0$, $(\phi, \psi + \psi') = (\phi, \psi) + (\phi, \psi')$,
$(\phi + \phi', \psi) = (\phi, \psi) + (\phi', \psi)$, $(\phi, a\psi) = a(\phi, \psi)$, $(a\phi, \psi) = a^*(\phi, \psi)$.
如果两个矢量内积为零,则称它们相互正交.若矢量集合中的每个矢量之间都相互正交,则称其为正交集. 任一矢量和它的共轭的内积称为此矢量的模.模为1的矢量称为归一化矢量.

原理二: 可观察物理量由厄米算符代表; 物理量测量所能取的值是相应算符的本征值.

算符:

希尔伯特空间的算符定义为将态空间变为它自己的映射.即:

若A和Ψ分别是希尔伯特空间的算符和态,则$A\Psi$也是希尔伯特空间的态.

通常选用线性算符,它满足

$$A(\xi\Psi+\eta\Phi)=\xi A\Psi+\eta A\Phi$$

算符A的厄米共轭算符$A^\dagger$定义为

$$(\Phi,A^\dagger\Psi)\equiv(A\Phi,\Psi)=(\Psi,A\Phi)^*$$

满足$A=A^\dagger$的算符叫厄米算符. 如果$A\Psi=\alpha\Psi$,则α叫算符A的本征值.

一个基本定理: 厄米算符的本征值是实数.

量子力学基本原理:

原理一： 物理状态用希尔伯特空间的态矢量描写. 相差一个复数因子的两个态矢量,描写同一物理状态.

原理二： 可观察物理量由厄米算符代表; 物理量测量所能取的值是相应算符的本征值.

原理三: 如果体系处于归一化的态Ψ($(\Psi,\Psi)=1$), 通过实验测量它位于一组正交归一态$\Psi_1,\Psi_2,\ldots$的第n个态上的几率为$|(\Psi,\Psi_n)|^2$.

进一步从态空间的完备性 希尔伯特空间的性质 可得到一个基本定理:

$$\sum_n |(\Psi,\Psi_n)|^2 = 1 \qquad = (\Psi,\Psi) = \sum_{m,n} c_m^* c_n (\Psi_m,\Psi_n) = \sum_n |c_n|^2$$

完备性： $\Psi=\sum_m c_m\Psi_m \;\Rightarrow\; (\Psi,\Psi_n)=\sum_m c_m(\Psi_m,\Psi_n)=c_n,\quad (\Psi_n,\Psi)=c_n^*$

对量子力学基本原理的感觉:

- ♣ 太数学化! 态的概念内藏玄机!
- ♡ 态的叠加—来自波的属性
- ♠ 态的内积—来自波的属性?
- ♢ 看不太出和经典物理有什么差别!
- ¶ 复数的作用?
- ✠ 态的测量?

看不出目前的态和粒子有何关系! 虽然态的属性和波相似，它还不是波，因为没有时空背景

叠加和算符的物理含义:

一个很不起眼的“加法”，通常人们不会觉得有什么特别之处!

局域的粒子通过态的 叠加 形成 波, 也是场

$$|\psi >\equiv a|x > +b|y >$$

粒子即在x处，也在y处!

直乘的量子态通过 叠加 形成纠缠

$$|\psi^{\pm} >\equiv a|\uparrow\uparrow> \pm b|\downarrow\downarrow>$$

波或场通过激发（算符作用）产生粒子 所有的算符都将化为产生算符和其共轭算符的乘积

$$a^{\dagger}(p)|\psi >= |\psi + p >$$

利用经典物理光的偏振说明态的叠加、内积与几率

对沿z方向传播的平面电磁波：

$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_{x0}e^{i(kz-\omega t+\phi_{x0})} \\ E_y(z,t) = E_{y0}e^{i(kz-\omega t+\phi_{y0})} \end{cases} \Rightarrow e^{i(kz-\omega t+\phi_{x0})}\sqrt{E_{x0}^2+E_{y0}^2}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{i(kz-\omega t+\phi_{x0})}\sqrt{E_{x0}^2+E_{y0}^2}\,[\cos\theta|h> + \sin\theta e^{i\delta}|v>], \quad |h>=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; |v>=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

偏振态： 光穿过偏振片形成标准的量子力学测量！

- 通过透振方向为α偏振片的线偏振光：$|\psi>=\cos\alpha|h>+\sin\alpha|v>$
- 椭圆偏振态：$|\psi'>=\cos\theta|h>+e^{i\delta}\sin\theta|v>$
- ......

$<h| = [1\ 0] \quad <v| = [0\ 1]$

穿透概率:

$|<\psi'|\psi>|^2$为偏振态$|\psi>$对透振态为$|\psi'>$的偏振片的穿透概率！

$$|<\psi'|\psi>|^2 = cos^2\theta\cos^2\alpha + \sin^2\theta\sin^2\alpha + \sin 2\theta\sin 2\alpha\cos\delta/2$$

《电动力学》 2021年第二次考试试题

(2021.5.16)

以下3道试题每题占本课程总成绩的5分， 总共15分！

1. 沿z方向在真空里传播的平面电磁波的电场强度可以写为：

$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_{x0}e^{i(kz-\omega t+\phi_{x0})} \\ E_y(z,t) = E_{y0}e^{i(kz-\omega t+\phi_{y0})} \end{cases} \quad (1)$$

以下先考虑线偏振情形，这时$\phi_{x0} = \phi_{y0}$，电场方向与x轴的夹角θ满足：

$$\cos\theta \equiv \frac{E_{x0}}{\sqrt{E_{x0}^2+E_{y0}^2}} \qquad \sin\theta = \frac{E_{y0}}{\sqrt{E_{x0}^2+E_{y0}^2}}$$

如果这个线偏振电磁波通过一个偏振片，这个偏振片只允许与x轴为夹角为α的线偏振电磁波通过。若要讨论透过此偏振片后的电磁波，我们所要做的是首先把上面线偏振电磁波分解成一个偏振方向与x轴夹角为α的线偏振电磁波，其电场强度记为$\vec{E}_\parallel$,再叠加一个偏振方向与x轴夹角为$\alpha+90°$的线偏振电磁波，其电场强度记为$\vec{E}_\perp$。$\vec{E}_\parallel$可以顺利通过偏振片，$\vec{E}_\perp$则通不过偏振片，因此透过偏振片的就是$\vec{E}_\parallel$波。

本题第一部分（2分）的任务是：

(a) 对上面的线偏振电磁波具体实现如上的分解

(b) 证明马吕斯定律：透过偏振片的线偏振电磁波与透过前的的平均能流密度的比值(实际也是透过和透过前的光强比值，称之为透过概率)是$\cos^2(\theta-\alpha)$.

我们现在回到表达式(1),把它改换为一个两行一列的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} = e^{i(kz-\omega t+\phi_{x0})}\sqrt{E_{x0}^2+E_{y0}^2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

其中：$\delta \equiv \phi_{y0}-\phi_{x0}$，$\theta$则按照前面给出的定义。现进一步简化上面表达式，对沿z方向传播的平面电磁波引入右矢表达：

$$|E(z,t)> \equiv \begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} = e^{i(kz-\omega t+\phi_{x0})}\sqrt{E_{x0}^2+E_{y0}^2}\Big[\cos\theta|h> + \sin\theta e^{i\delta}|\nu>\Big]$$

其中：$|h>$和$|\nu>$是两种基本的两行一列矩阵，它们分别定义如下，

$$|h> \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\nu> \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

本题第二部分（1分）的任务是证明

(a) 如果只讨论偏振，那么表达式前的共同因子$e^{i(kz-\omega t+\phi_{x0})}\sqrt{E_{x0}^2+E_{y0}^2}$并不重要，中括号里的项$\cos\theta|h> + \sin\theta e^{i\delta}|\nu>$完全确定了此沿z方向传播的平面电磁波的偏振行为，我们称之为一个偏振状态。

(b) 在上问基础上进一步证明偏振态$|\psi> = \cos\alpha|h> + \sin\alpha|\nu>$,描写的是一个线偏振电磁波；更普遍地$|\psi_\delta> = \cos\theta|h> + \sin\theta e^{i\delta}|\nu>$,描写的是一般是一个椭圆偏振电磁波。

进一步引入$|h>$和$|\nu>$所各自对应的左矢–一行两列的矩阵

$$<h| \equiv (1,0) \qquad <\nu| \equiv (0,1)$$

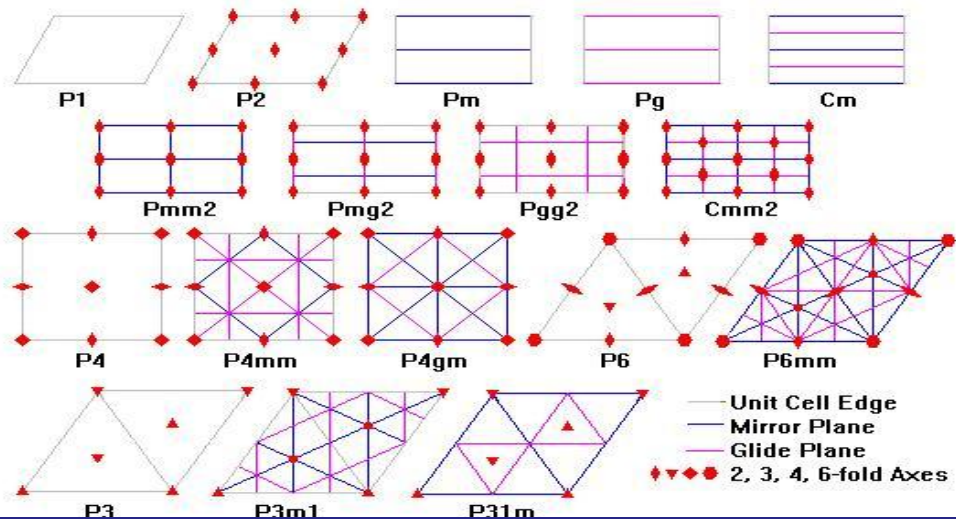
并把第一部分中提到的偏振片的偏振状态记为$<\psi| = \cos\alpha <h| + \sin\alpha <\nu|$, 线偏振波的偏振状态记为$|\psi_0> = \cos\theta|h> + \sin\theta|\nu>$。

本题第三部分（2分）的任务是

(a) 证明第一部分所给出的偏振片透过概率正好是左矢和右矢内积的模平方：$|<\psi|\psi_0>|^2$

(b) 如果把上面内积模平方的结论进一步从线偏振推广到任意的偏振，请计算一个在前面第二部分（b）中定义的一般的椭圆偏振电磁波$|\psi_\delta>$通过和上问同样的偏振片后的透过率。并请用标准电动力学的方法（而不是目前的模平方方法）证明用模平方方法得到的结果确实是正确的！

(c) 神奇的是，这种用左右矢及其内积表达的偏振状态，及偏振光穿过偏振片的过程（实际也是某种“测量过程”）和量子力学的表述完全一样！据此，请你写下对内积模平方（在量子力学中对应几率幅和几率）有什么更进一步的理解？


P1
P2
Pm
Pg
Cm
Pmm2
Pmg2
Pgg2
Cmm2
P4
P4mm
P4gm
P6
P6mm
P3
P3m1
P31m
Unit Cell Edge
Mirror Plane
Glide Plane
2, 3, 4, 6-fold Axes

群的定义:

在集合$G=\{g,h,k,\cdots\}$上定义了一个二元运算: 对G中任意一对有序元素g,h,都有G中一个第三元素, 记为gh,与它对应. 如果这个二元运算满足如下条件:

- 在G中存在着称之为单位元的元素e它唯一, 它对所有$g\in G$有$ge=eg=g$
- 对每一个$g\in G$, 在G中存在一个逆元g^{-1}它唯一, 使$gg^{-1}=g^{-1}g=e$成立
- 对所有$g,h,k\in G$, 结合律$(gh)k=g(hk)$成立

那么我们称G是一个群.而称这个二元运算为该群的乘法.

- 若$gh=hg$,则元素g,h可换.如果G中所有元素都可换,称G为Abel群.
- G中元素的数目叫G的阶.阶数有限的叫有限群;阶数无限的叫无限群.
- 若G的子集H对于G中的乘法成为一个群,就把H成为是G的一个子群.

- $GL(n)$: 由$n\times n$非奇异的复矩阵形成的复一般线性群.
- $U(n)$: 由$n\times n$复幺正矩阵形成的幺群.特别地$U(1):\ e^{i\theta}$
- $SO(n)$: 由模为一的$n\times n$实正交矩阵形成的n维空间转动群

群表示:

复的向量空间V映射到自身上的所有非奇异线性变换所形成的群记为$GL(V)$.
G到$GL(V)$的同态两元乘积的像等于两元像的乘积$T: g \mapsto T(g)$, 称为群G的表示;
V叫做表示空间; V的维数叫表示的维数.

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1 g_2) \qquad g_1, g_2 \in G$$
$$T(g)^{-1} = T(g^{-1}) \qquad g \in G$$
$$T(e) = E$$

G到$GL(n)$的同态$T: g \mapsto T(g)$, 称为群G的n维矩阵表示

群G的任一表示空间为V的表示T定义了许多矩阵表示. 因为若$\{v_1, \cdots, v_n\}$是V的一个基底,即$T(g)v_k = T(g)_{kj}v_j$定义的矩阵$T(g)_{kj}$形成G的n维矩阵表示. V的基底的每一种不同选择,给出一个由T确定的G的新的矩阵表示.例, $v_j = S_{ji}v_i'$给出的新的基底$\{v_1', \cdots, v_n'\}$所对应的矩阵表示$T'(g) = S^{-1}T(g)S$

$$(T')_{li}v_i' \equiv Tv_l' = TS^{-1}_{lk}S_{ki}v_i' = S^{-1}_{lk}Tv_k = S^{-1}_{lk}T_{kj}v_j = S^{-1}_{lk}T_{kj}S_{ji}v_i'$$

- 两个复n维矩阵表示T和T'是等价的: 若$\forall S \in GL(n)$使得$T' = S^{-1}TS$
- 空间V上的n维表示T和T'是等价的: 若$\forall S \in GL(V)$使得$T' = S^{-1}TS$

子表示:

群 G 的表示 $G \ni g \longmapsto T(g)$ 对应的表示空间 V 若具有一个在 $G-$ 线性作用下不变的子空间 U, 则 G 在 U 上的作用也提供了一个表示, 称为 T 的子表示.

不可约表示:

T 是 T 的一个子表示, 称为平凡的子表示. 若表示 T 没有非平凡的子表示, 则称为不可约表示，对应地非不可约的表示叫做可约表示.

不可约表示中的任何一个元素出发通过若干次群变换，总可以将其变成任何一个指定的元素，而可约表示则做不到.

直和:

若群 G 具有两个表示 $G \ni g \longmapsto T_1(g), G \ni g \longmapsto T_2(g)$,
则 $G \ni g \longmapsto T_1(g) \oplus T_2(g)$ 也是 G 的矩阵表示, 称为表示 T_1 与 T_2 的直和.

若一个表示 T 经过适当的基变换之后, 能够表达成两个表示 T_1 和 T_2 的直和, 则称其为完全可约表示. 特别地, T_1 和 T_2 都是 T 的子表示.

物理体系具有对称性指不同观察者观察同一实验得到同样的实验结果

观察者$\mathcal{O}$通过实验测量处于归一化态Ψ的物理体系位于一组正交归一态Ψ_1, $\Psi_2, \ldots$第n个态的几率与另一个观察者$\mathcal{O}'$对同一个物理体系的状态(标记其为Ψ')通过实验测量位于对应的正交归一态$\Psi_1', \Psi_2', \ldots$第n个态上的几率相同,

$$|(\Psi, \Psi_n)|^2 = |(\Psi', \Psi_n')|^2$$

$\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$和$\Psi', \Psi_1', \Psi_2', \ldots$之间的联系称为对称性变换.

这样的变换形成群

- 存在单位变换,使Ψ变换成它自己,$\Psi' = \Psi$.
- 对任何一个变换T将Ψ变换成Ψ',存在逆变换T^{-1}将Ψ'变换成Ψ.
- 对两个变换T_1将Ψ变换成Ψ'和T_2将Ψ'变换成Ψ'',存在联合变换T_2T_1将Ψ变换成Ψ''.

问题: $\Psi = \Phi + \Xi, \ \Psi' = U\Psi, \ \Phi' = U\Phi, \ \Xi' = U\Xi, \ \Rightarrow \ \Psi' = \Phi' + \Xi'$?

有很多对称性在现实的物理世界中并不存在,这时虽然 $|(\Psi, \Phi)|^2 = |(\Psi', \Phi')|^2$

一般说并不成立,但我们仍可讨论满足它的可能的对称性变换,即使它并不真是理论所具有的对称性 ?

E.P.Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren

(Braunschweig, 1931): pp.251-3 (English translation, Academic Press, Inc,New York,1959).

$\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$和$\Psi', \Psi_1', \Psi_2', \ldots$之间的联系可以通过幺正或反幺正算符联系

$$\Psi' = U\Psi \qquad \Psi_1' = U\Psi_1 \qquad \Psi_2' = U\Psi_2 \qquad \ldots$$

如果U是幺正算符,它必须满足$U^\dagger = U^{-1}$或

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi) \qquad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi$$

如果U是反幺正算符,它必须满足

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^* \qquad U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi$$

反线性算符A采用如下的厄米共轭算符定义

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^* = (\Psi, A\Phi)$$

则能够保证幺正和反幺正算符同时都满足条件$U^\dagger = U^{-1}$.

对称性表示定理

正交归一的完备基矢ψ_i：$\Psi=\sum_i a_i\psi_i$，$a_i=(\psi_i,\Psi)$ 是展开系数。

做对称变换$U\Psi=U\sum_i a_i\psi_i$ 记$\Psi'=U\Psi$，$\psi_i'=U\psi_i$。ψ_i'也是正交完备基矢 $|(\Phi',\Psi')|=|(\Phi,\Psi)|$

$$\Rightarrow |(\psi_i',\psi_j')|=|(\psi_i,\psi_j)|=\delta_{ij}\Rightarrow(\psi_i',\psi_j')=\begin{Bmatrix}0 & i\neq j\\ e^{ic_i}\xRightarrow{\text{模恒为实}}1 & i=j\end{Bmatrix}=\delta_{ij},$$

ψ_i'的基矢数目同ψ_i一样多。由于ψ_i'构成正交完备集，Ψ'也可按其展开：

$\Psi'=\sum_i a_i'\psi_i'$,其中$a_i'=(\psi_i',\Psi')$是展开系数。

$$|(\Phi',\Psi')|=|(\Phi,\Psi)|\Rightarrow|a_i'|=|(\psi_i',\Psi')|=|(\psi_i,\Psi)|=|a_i|.$$

由它推出a_i'和a_i的关系只有两种可能：　$\mathbf{a_i'=a_ie^{i\delta_i}}$　　$\mathbf{a_i'=a_i^*e^{i\delta_i}}$

$(\mathbf{b_i+c_i})'=\mathbf{b_i'+c_i'}\Rightarrow|\mathbf{b_i+c_i}|=|\mathbf{b_i'+c_i'}|\xRightarrow{\text{平方}}\cos(\theta_{\mathbf{b_i}}-\theta_{\mathbf{c_i}})=\cos(\theta_{\mathbf{b_i'}}-\theta_{\mathbf{c_i'}})\xRightarrow{\text{一种可能}}\theta_{\mathbf{b_i'}}-\theta_{\mathbf{b_i}}=\theta_{\mathbf{c_i'}}-\theta_{\mathbf{c_i}}+\mathbf{2n\pi}$ $\mathbf{a_i'=a_ie^{i\delta_i}}$ δ_i与$\mathbf{a_i}$无关

$\Psi'=\sum_i a_i'\psi_i'=\sum_i a_ie^{i\delta_i}\psi_i'$　　$\Phi'=\sum_i b_ie^{i\delta_i}\psi_i'=\sum_i b_i'\psi_i'$　　新旧展开系数俯角差δ_i和态没关

$$U(\alpha\Psi+\beta\Phi)=(\alpha\Psi+\beta\Phi)'=\sum_i(\alpha a_i+\beta b_i)e^{i\delta_i}\psi_i'=\alpha\Psi'+\beta\Phi'=\alpha U\Psi+\beta U\Phi$$

它说明**U**是线性算符。进一步

$$(\Psi',\Phi')=(\sum_i a_i'\psi_i',\sum_j b_j'\psi_j')=\sum_i a_i'^*b_i'=\sum_i a_i^*b_i=(\sum_i a_i\psi_i,\sum_j b_j\psi_j)=(\Psi,\Phi)$$

说明**U**是幺正算符

对称性表示定理

正交归一的完备基矢ψ_i: $\Psi = \sum_i a_i\psi_i$, $a_i = (\psi_i, \Psi)$ 是展开系数。

做对称变换$U\Psi = U\sum_i a_i\psi_i$ 记$\Psi' = U\Psi$, $\psi_i' = U\psi_i$. ψ_i'也是正交完备基矢

$$|(\Phi', \Psi')| = |(\Phi, \Psi)| \Rightarrow |(\psi_i', \psi_j')| = |(\psi_i, \psi_j)| = \delta_{ij} \Rightarrow (\psi_i', \psi_j') = \delta_{ij},$$

ψ_i'的基矢数目同ψ_i一样多。由于ψ_i'构成正交完备集，Ψ'也可按其展开：

$\Psi' = \sum_i a_i'\psi_i'$,其中$a_i' = (\psi_i', \Psi')$是展开系数。

$$|(\Phi', \Psi')| = |(\Phi, \Psi)| \Rightarrow |a_i'| = |(\psi_i', \Psi')| = |(\psi_i, \Psi)| = |a_i|.$$

由它推出a_i'和a_i的关系只有两种可能： $\mathbf{a_i' = a_i e^{i\delta_i}}$ $\mathbf{a_i' = a_i^* e^{i\delta_i}}$

$(\mathbf{b_i+c_i})' = \mathbf{b_i'+c_i'} \Rightarrow |\mathbf{b_i+c_i}| = |\mathbf{b_i'+c_i'}| \xRightarrow{\text{平方}} \cos(\theta_{\mathbf{b_i}} - \theta_{\mathbf{c_i}}) = \cos(\theta_{\mathbf{b_i'}} - \theta_{\mathbf{c_i'}})| \xRightarrow{\text{另一种可能}} \theta_{\mathbf{b_i'}} + \theta_{\mathbf{b_i}} = \theta_{\mathbf{c_i'}} + \theta_{\mathbf{c_i}} + 2n\pi$ $\mathbf{a_i' = a_i^* e^{i\delta_i}}$ $\delta_{\mathbf{i}}$与$\mathbf{a_i}$无关

$\Psi' = \sum_i a_i'\psi_i' = \sum_i a_i^* e^{i\delta_i}\psi_i'$ $\Phi' = \sum_i b_i'\psi_i' = \sum_i b_i^* e^{i\delta_i}\psi_i'$ 新旧展开系数的俯角和δ_i和态没关

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = (\alpha\Psi + \beta\Phi)' = \sum_i (\alpha^* a_i^* + \beta^* b_i^*) e^{i\delta_i}\psi_i' = \alpha^*\Psi' + \beta^*\Phi' = \alpha^* U\Psi + \beta^* U\Phi$$

它说明U是反线性算符。进一步

$$(\Psi', \Phi') = (\sum_i a_i'\psi_i', \sum_j b_j'\psi_j') = \sum_i a_i'^* b_i' = (\sum_i a_i^* b_i)^* = (\sum_i a_i\psi_i, \sum_j b_j\psi_j)^* = (\Psi, \Phi)^*$$

说明U是反幺正算符

投影表示

记描述对称性变换T的幺正或反幺正算符为$U(T)$,考虑态所具有的相角任意性

$$U(T_2)U(T_1)\Psi = e^{i\phi_\Psi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi$$

$\phi_\Psi(T_2,T_1)$是相角.我们下面证明,它实际上是不依赖于态的.

将上式应用于$\Psi_{AB} \equiv \Psi_A + \Psi_B$, 则

$$\begin{aligned} e^{\pm i\phi_{AB}}\Psi_{AB} &= U^{-1}(T_2T_1)e^{i\phi_{AB}}U(T_2T_1)\Psi_{AB} = U^{-1}(T_2T_1)U(T_2)U(T_1)(\Psi_A + \Psi_B) \\ &= U^{-1}(T_2T_1)[U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B] \\ &= U^{-1}(T_2T_1)[e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\Psi_A + e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\Psi_B] = e^{\pm i\phi_A}\Psi_A + e^{\pm i\phi_B}\Psi_B \end{aligned}$$

对任意的Ψ_A和Ψ_B,上式要求$e^{i\phi_{AB}} = e^{i\phi_A} = e^{i\phi_B}$,也就是相因子与态无关

$$U(T_2)U(T_1)\Psi = e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi$$

以下只讨论$\phi_\Psi(T_2,T_1) = 0$的情况，多连通的情形（见后面拓扑学讨论）除外 作业8

连续对称性

$U=1$是一个恒等变换,它把态矢量变为它自己,是一个幺正的算符.

任何可以通过一些参数的连续变化变成恒等变换的对称性变换由连续性要求一定要由幺正算符而不是反幺正算符来代表. 特别地,当无穷接近恒等变换时,可以引入无穷小的实参数ϵ来描述,

$$U=1+i\epsilon t$$

反幺正算符不可能是连续算符！

U的幺正性要求t必须是厄米算符,它是一个物理可观测量的候选者

一类由一组有限个实连续参数θ^a描述,所有变换都连续地连接到恒等变换的变换形成的群叫连通李群

对此类变换, 由θ描述的变换$T(\theta)$和由$\bar{\theta}$描述的变换$T(\bar{\theta})$形成的联合变换和相应的幺正算符为:

$$T(\bar{\theta})T(\theta)=T(f(\bar{\theta},\theta)) \qquad U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta))=U(T(f(\bar{\theta},\theta)))$$

如果将$\theta^a=0$取为恒等变换的参数 $f^a(\theta,0)=f^a(0,\theta)=\theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$$f^a(\bar{\theta},\theta)=\theta^a+\bar{\theta}^a+f^a_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c+\cdots \qquad U(T(\theta))=1+i\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^cQ_{bc}+\cdots$$

$Q_a, Q_{bc}=Q_{cb}$ 是不依赖于θ和$\bar{\theta}$的作用到态矢量空间的算符， Q_a 是厄米算符

$$[1+i\bar{\theta}^aQ_a+\frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^cQ_{bc}+\cdots][1+i\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^cQ_{bc}+\cdots]$$
$$=1+i(\theta^a+\bar{\theta}^a+f^a_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c+\cdots)Q_a+\frac{1}{2}(\theta^b+\bar{\theta}^b+\cdots)(\theta^c+\bar{\theta}^c+\cdots)Q_{bc}+\cdots$$

李群

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)) \qquad U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar{\theta}, \theta)))$$

如果将$\theta^a = 0$取为恒等变换的参数 $f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = \theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \cdots$ $\quad U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots$

$Q_a, Q_{bc} = Q_{cb}$ 是不依赖于θ和$\bar{\theta}$的作用到态矢量空间的算符， Q_a 是厄米算符

$$[1 + i\bar{\theta}^a Q_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^c Q_{bc} + \cdots][1 + i\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots]$$

$$= 1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \cdots)Q_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + \cdots)(\theta^c + \bar{\theta}^c + \cdots)Q_{bc} + \cdots$$

准到$\theta, \bar{\theta}$的二次幂,它导致 $Q_{bc} = -Q_bQ_c - if^a_{bc}Q_a$

$$[1 + i\bar{\theta}^a Q_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^c Q_{bc} + \cdots][1 + i\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots]$$

$$= 1 + i\bar{\theta}^a Q_a + i\theta^a Q_a - \bar{\theta}^b\theta^c Q_bQ_c + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^c Q_{bc} + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots$$

$$1 + i(\theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c + \cdots)Q_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar{\theta}^b + \cdots)(\theta^c + \bar{\theta}^c + \cdots)Q_{bc}$$

$$= 1 + i\bar{\theta}^a Q_a + i\theta^a Q_a + \bar{\theta}^b\theta^c(if^a_{bc}Q_a + Q_{bc}) + \frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^c Q_{bc} + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots$$

连续对称性

$$T(\bar{\theta})T(\theta)=T(f(\bar{\theta},\theta)) \qquad U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta))=U(T(f(\bar{\theta},\theta)))$$

如果将$\theta^a=0$取为恒等变换的参数 $f^a(\theta,0)=f^a(0,\theta)=\theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$f^a(\bar{\theta},\theta)=\theta^a+\bar{\theta}^a+f^a_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c+\cdots$ $\qquad U(T(\theta))=1+i\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^cQ_{bc}+\cdots$

$Q_a, Q_{bc}=Q_{cb}$ 是不依赖于θ和$\bar{\theta}$的作用到态矢量空间的算符， Q_a 是厄米算符

$$[1+i\bar{\theta}^aQ_a+\frac{1}{2}\bar{\theta}^b\bar{\theta}^cQ_{bc}+\cdots][1+i\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^cQ_{bc}+\cdots]$$

$$=1+i(\theta^a+\bar{\theta}^a+f^a_{bc}\bar{\theta}^b\theta^c+\cdots)Q_a+\frac{1}{2}(\theta^b+\bar{\theta}^b+\cdots)(\theta^c+\bar{\theta}^c+\cdots)Q_{bc}+\cdots$$

准到$\theta,\bar{\theta}$二次幂,导致 $Q_{bc}=-Q_bQ_c-if^a_{bc}Q_a$. Q_{bc}对指标b,c对称$\Rightarrow$ **(1):** $0=-Q_bQ_c+Q_cQ_b-if^a_{bc}Q_a+if^a_{cb}Q_a$

$$[Q_b,Q_c]=iC^a{}_{bc}Q_a \qquad C^a{}_{bc}\equiv-f^a{}_{bc}+f^a{}_{cb} \qquad Q_{bc}=-\frac{1}{2}(Q_bQ_c+Q_cQ_b)-\frac{i}{2}(f^a{}_{bc}+f^a{}_{cb})Q_a$$

上述关系是李代数关系,通过它可定出展开的所有高阶项. 将无穷多的无穷小变化迭加起来可以得到有限大变换。

由上面在单位元附近群参数的可加性可将有限的参数分解为无穷多的单位元附近的参数的叠加$T(\theta)\equiv\lim_{N\to\infty}T^N(\theta/N)$,

$$U(T(\theta))=\lim_{N\to\infty}\left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)\right]^N=\lim_{N\to\infty}[1+\frac{i}{N}\theta^aQ_a]^N=e^{iQ_a\theta^a}$$ $\Rightarrow$ 若θ^a有量纲,Q_a必有对应的逆量纲!

Q_a也叫生成内部对称性变换的生成元。**(2):** $\frac{1}{2}[iQ_a\theta^a]^2=-\frac{1}{4}\theta^b\theta^c(Q_bQ_c+Q_cQ_b)\Rightarrow f^a_{bc}=-f^a_{cb}$

李群的生成元:

♣ 具有操作的作用（一种测量？），物理含义？

♢ 与所变换的参量对偶！

♡ 在态空间厄米

♠ 是基础可观测量的候选者！

¶ 生成元之间的对易关系！ 非对易意味着量子力学？

$$[(1+i\theta^b Q_b),(1+i\bar{\theta}^c Q_c)] = -\theta^b\bar{\theta}^c[Q_b,Q_c] = -iC^a{}_{bc}\theta^b\bar{\theta}^c Q_a$$

当生成元有量纲时，结构常数中将要出现带生成元量纲的基本物理常数！

目前的状态 ♣ 有了量子力学的基本假设 态，力学量，几率

♢ 但只泛泛而谈，并未给出确定特别的态和力学量的原则！

♡ 因时空背景未能显现，态还不是波，更看不出是粒子！

♠ 对称性粉墨登场： 它的实现必须通过幺正或反幺正算符

¶ 连续对称性通过生成元厄米算符产生 ⇒ 特殊的可观测物理量

✠ 可观测物理量的本征态定义了 特殊的物理态 building block

® 呼唤物理体系有与时空相关的 核心连续对称性 生成元⇒本征态 ！