1. 对非齐次洛伦兹变换,证明$T^{-1}(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda a)$.

2. 对非齐次洛伦兹变换,证明$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$.

3. 对非齐次洛伦兹变换,证明Det$\Lambda = 1$,$\Lambda^0{}_0 \geq +1$这一叶形成子群。

4. 对非齐次洛伦兹变换,证明Det$\Lambda = -1$,$\Lambda^0{}_0 \geq +1$这一叶可以看成第1叶与空间反射变换$\mathcal{P}$的乘积。

5. 对非齐次洛伦兹变换,证明Det$\Lambda = 1$,$\Lambda^0{}_0 \leq -1$这一叶可以看成第1叶与时间反演变换$\mathcal{T}$的乘积。

6. 对非齐次洛伦兹变换,证明Det$\Lambda = -1$,$\Lambda^0{}_0 \leq -1$这一叶可以看成第1叶与时间反演变换$\mathcal{T}$和空间反射变换$\mathcal{P}$的联合乘积。

7. 试从

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} + \epsilon^\rho P^\sigma - \epsilon^\sigma P^\rho$$
$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho] = \omega_\mu{}^\rho P^\mu$$

出发证明

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk}J^k \qquad [J^i, K^j] = i\epsilon_{ijk}K^k \qquad [K^i, K^j] = -i\epsilon_{ijk}J^k$$
$$[J^i, P^j] = i\epsilon_{ijk}P^k \qquad [K^i, P^j] = iH\delta_{ij}$$
$$[J^i, H] = [P^i, H] = [H, H] = 0 \qquad [K^i, H] = -iP^i$$

8. 试证明: 在下式中加入中心荷后,可以通过重新定义生成元将这些中心荷去掉.

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}$$
$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho$$
$$[P^\mu, P^\rho] = 0$$

9. 试证明$p^2 \equiv g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$和$p^0$的符号在洛伦兹变换下是不变的，并且任何两个具有同样的p^2值和p^0符号的动量一定可以通过某个洛伦兹变换相联系。

10. 试证明内部对称性生成元Q_a与非齐次洛伦兹群的生成元$J^{\rho\sigma}$和P^ρ对易。

11. 试证明

$$D_{\sigma'\sigma}(\overline{W}W) = \sum_{\sigma"} D_{\sigma'\sigma"}(\overline{W}) D_{\sigma"\sigma}(W)$$

12. 如果对参考动量的态取正交归一条件$(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma'\sigma}$,证明在我们的归一化选择$N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}$下,参考动量态之间的正交归一条件可以推广到适用于所有单粒子态。即：$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})\delta_{\sigma'\sigma}$

13. 试证明参考动量的态取正交归一条件$(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma'\sigma}$ 将导致$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}$ 中定义的矩阵$D(W)$为幺正矩阵$D^\dagger(W) = D^{-1}(W)$.

14. 试证明

$$L^i_k(p) = \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k \qquad L^i{}_0(p) = L^0{}_i(p) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$L^0{}_0(p) = \gamma \equiv \frac{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}{M} \qquad \hat{p}_i \equiv \frac{p^i}{|\vec{p}|}$$

给出的$L^\mu{}_\nu(p)$满足$g_{\mu\nu}L^\mu{}_\rho(p)L^\nu{}_\sigma(p) = g_{\rho\sigma}$和$p_\mu L^\mu{}_\nu(p) = k_\nu$.

15. 试证明对有质量的正能单粒子态,$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(e^\Theta) = (e^{\frac{i}{2}\Theta_{ik}J^{(j)}_{ik}})_{\sigma'\sigma}$ 给出的不可约表示$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R)$对参考动量的单粒子态$\Psi_{k,\sigma}$角动量z分量的本征态,公式$J^3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}$ 成立,并且进一步

$$(J^1 \pm iJ^2)\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\Psi_{k,\sigma\pm 1}$$

16. 试证明正能单粒子态$\Psi_{p,\sigma}$是算符T^2的本征值为$(-1)^{2j}$的本征态.(对无质量态$j = \sigma$)