量子场论 量子力学与狭义相对论

王青

清华大学

2011年9月12日-2012年1月1日

物理学基本单位

物理学的基本元素： 时间, 空间, 物质（能量） $\Rightarrow$ 三个物理学基本单位 ！

物理学基本理论：

- 狭义相对论: $c = 299792.458\ km\ s^{-1}$
- 量子力学: $\hbar = 6.5821220 \times 10^{-22}\ MeV\ s$

c 和 $\hbar$ 的理论计算超出理论物理学的范畴 ！ 基本物理学常数随时间的变化?

自然单位制: 只有一个基本单位

- $c = 1$ 长度单位和时间单位关联起来 1秒=299792.458公里
- $\hbar = 1$ 质量单位和时间单位关联起来 1秒$^{-1}$ $= 6.5821220 \times 10^{-22}$兆电子伏特

$$10^{-15}\text{米} = 1\text{费米}^{-1} = 197.327053\text{兆电子伏特}$$

物理学量纲的起源 ? 维数转移! 没有基本物理单位 所有物理量都是无量纲的!

原理一: 物理状态用希尔伯特空间的态矢量描写. 相差一个复数因子的两个态矢量,描写同一物理状态.

希尔伯特空间:

- 它是∞维的复矢量空间
- 存在完备的基矢组
- 可以定义内积空间

物理态存在于含复数的空间！

态矢量是"抽象的东东"！

态矢量:

- 如果Φ和Ψ分别是希尔伯特空间的两个态矢量,那么,$\xi\Phi+\eta\Psi$也是这个空间的态矢量. 其中,ξ和η是两个任意复数.
- 对任意一对态矢量Φ和Ψ,存在复数内积(Φ,Ψ),满足:

$$(\Phi,\Psi)=(\Psi,\Phi)^*$$

$$(\Phi,\xi_1\Psi_1+\xi_2\Psi_2)=\xi_1(\Phi,\Psi_1)+\xi_2(\Phi,\Psi_2)$$

$$(\eta_1\Phi_1+\eta_2\Phi_2,\Psi)=\eta_1^*(\Phi_1,\Psi)+\eta_2^*(\Phi_2,\Psi)$$

$$(\Psi,\Psi)\geq 0 \qquad (\Psi,\Psi)=0 \xrightarrow{\text{当且仅当}} \Psi=0$$

希尔伯特空间

复矢量空间

元素(或称为矢量)$\{\psi, \phi, \chi, \cdots\}$的集合L在复数域C上定义了加法和数乘后,则称它为复矢量空间.

- **加法**: 在集合L中定义了加法运算.任意两个元素可以相加,相加之后的和仍是集合中的元素.加法满足交换律和结合律; 加法存在单位元0矢量,使得$\psi + 0 = \psi$;加法还存在逆元,若记$-\psi$为ψ的逆元,则:$\psi + (-\psi) = 0$.
- **数乘**: 集合L中的任一矢量与数域C上的复数相乘将得到集合内的另一矢量.对$\psi, \phi \subset L, a, b \subset C$, 数乘运算满足: $a(\psi + \phi) = a\psi + a\phi$, $(a + b)\psi = a\psi + b\psi$, $(ab)\psi = a(b\psi)$, $1\psi = \psi$, $0\psi = 0$.

完备的基矢组

- **线性无关**: 矢量集$\phi_i, i = 1, 2, \cdots, n$满足$\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i = 0$仅对所有$a_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$才成立.则称此n个矢量线性无关.
- **完备集**: n维矢量空间L中,n个线性无关的矢量集合称为L中的完备集. 空间中任一矢量都可表为此完备集的线性组合$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i$.
- **基矢**: n维矢量空间L中的任意一组完备集的n个线性无关的矢量称为此空间的基矢量.

内积空间

存在一个共轭空间,其中的每个矢量与原空间的矢量有一一对应关系,并且定义了内积运算:
$(\phi, \psi) = (\psi, \phi)^*$, $(\phi, \phi) \geq 0$, $(\phi, \psi + \psi') = (\phi, \psi) + (\phi, \psi')$,
$(\phi + \phi', \psi) = (\phi, \psi) + (\phi', \psi)$, $(\phi, a\psi) = a(\phi, \psi)$, $(a\phi, \psi) = a^*(\phi, \psi)$.
如果两个矢量内积为零,则称它们相互正交.若矢量集合中的每个矢量都与相互正交,则称奇为正交集. 任一矢量和它的共轭的内积称为此矢量的模.模为1的矢量称为归一化矢量.

原理二: 可观察物理量由厄米算符代表; 物理量测量所能取的值是相应算符的本征值.

算符:

希尔伯特空间的算符定义为将态空间变为它自己的映射.即:

若A和Ψ分别是希尔伯特空间的算符和态,则$A\Psi$也是希尔伯特空间的态.

通常选用线性算符,它满足

$$A(\xi\Psi+\eta\Phi)=\xi A\Psi+\eta A\Phi$$

算符A的厄米共轭算符$A^\dagger$定义为

$$(\Phi,A^\dagger\Psi)\equiv(A\Phi,\Psi)=(\Psi,A\Phi)^*$$

满足$A=A^\dagger$的算符叫厄米算符. 如果$A\Psi=\alpha\Psi$,则α叫算符A的本征值.

一个基本定理: 厄米算符的本征值是实数.

量子力学基本原理:

原理一: 物理状态用希尔伯特空间的态矢量描写. 相差一个复数因子的两个态矢量,描写同一物理状态.

原理二: 可观察物理量由厄米算符代表; 物理量测量所能取的值是相应算符的本征值.

原理三: 如果体系处于归一化的态Ψ($(\Psi, \Psi) = 1$), 通过实验测量它位于一组正交归一态$\Psi_1, \Psi_2, \ldots$的第n个态上的几率为$|(\Psi, \Psi_n)|^2$.

进一步从态空间的完备性 希尔伯特空间的性质 可得到一个基本定理:

$$\sum_n |(\Psi, \Psi_n)|^2 = 1$$

对量子力学基本原理的感觉:

♣ 太数学化!

♢ 态的概念内藏玄机!

♡ 态的叠加?

♠ 态的内积?

¶ 复数的作用?

✠ 态的测量?

群的定义:

在集合$G=\{g,h,k,\cdots\}$上定义了一个二元运算: 对G中任意一对有序元素g,h,都有G中一个第三元素, 记为gh,与它对应. 如果这个二元运算满足如下条件:

- 在G中存在着称之为单位元的元素e它唯一, 它对所有$g\in G$有$ge=eg=g$
- 对每一个$g\in G$, 在G中存在一个逆元g^{-1}它唯一, 使$gg^{-1}=g^{-1}g=e$成立
- 对所有$g,h,k\in G$, 结合律$(gh)k=g(hk)$成立

那么我们称G是一个群.而称这个二元运算为该群的乘法.

- 若$gh=hg$,则元素g,h可换.如果G中所有元素都可换,称G为Abel群.
- G中元素的数目叫G的阶.阶数有限的叫有限群;阶数无限的叫无限群.
- 若G的子集H对于G中的乘法成为一个群,就把H成为是G的一个子群.

- $GL(n)$: 由$n\times n$非奇异的复矩阵形成的复一般线性群.
- $U(n)$: 由$n\times n$复幺正矩阵形成的幺群.特别地$U(1):\ e^{i\theta}$
- $SO(n)$: 由模为一的$n\times n$实正交矩阵形成的n维空间转动群

群表示:

复的向量空间V映射到自身上的所有非奇异线性变换所形成的群记为$GL(V)$.

G到$GL(V)$的同态两元乘积的像等于两元像的乘积$T : g \mapsto T(g)$, 称为群G的表示;
V叫做表示空间; V的维数叫表示的维数.

$$
\begin{aligned}
&T(g_1)T(g_2) = T(g_1 g_2) \qquad g_1, g_2 \in G \\
&T(g)^{-1} = T(g^{-1}) \qquad g \in G \\
&T(e) = E
\end{aligned}
$$

G到$GL(n)$的同态$T : g \mapsto T(g)$, 称为群G的n维矩阵表示

群G的任一表示空间为V的表示T定义了许多矩阵表示. 因为若$\{v_1, \cdots, v_n\}$是V的一个基底,即$T(g)v_k = T(g)_{jk}v_j$定义的矩阵$T(g)_{jk}$形成G的n维矩阵表示. V的基底的每一种不同选择,给出一个由T确定的G的新的矩阵表示.例, $v_i = S_{ij}v'_j$给出的新的基底$\{v'_1, \cdots, v'_n\}$所对应的矩阵表示$T'(g) = ST(g)S^{-1}$

- 两个复n维矩阵表示T和T'是等价的: 若$\forall S \in GL(n)$使得$T' = STS^{-1}$
- 空间V上的n维表示T和T'是等价的: 若$\forall S \in GL(V)$使得$T' = STS^{-1}$

子表示:

群 G 的表示 $G \ni g \longmapsto T(g)$ 对应的表示空间 V 若具有一个在 $G-$ 线性作用下不变的子空间 U, 则 G 在 U 上的作用也提供了一个表示, 称为 T 的子表示.

不可约表示:

T 是 T 的一个子表示, 称为平凡的子表示. 若表示 T 没有非平凡的子表示, 则称为不可约表示，对应地非不可约的表示叫做可约表示.

不可约表示中的任何一个元素出发通过若干次群变换，总可以将其变成任何一个指定的元素，而可约表示则做不到.

直和:

若群 G 具有两个表示 $G \ni g \longmapsto T_1(g), G \ni g \longmapsto T_2(g)$,
则 $G \ni g \longmapsto T_1(g) \oplus T_2(g)$ 也是 G 的矩阵表示, 称为表示 T_1 与 T_2 的直和.

若一个表示 T 经过适当的基变换之后, 能够表达成两个表示 T_1 和 T_2 的直和, 则称其为完全可约表示. 特别地, T_1 和 T_2 都是 T 的子表示.

物理体系具有对称性指不同观察者观察同一实验得到同样的实验结果

观察者$\mathcal{O}$通过实验测量处于归一化态Ψ的物理体系位于一组正交归一态Ψ_1, $\Psi_2, \ldots$第n个态的几率与另一个观察者$\mathcal{O}'$对同一个物理体系的状态(标记其为Ψ')通过实验测量位于对应的正交归一态$\Psi'_1, \Psi'_2, \ldots$ 第n个态上的几率相同,

$$|(\Psi, \Psi_n)|^2 = |(\Psi', \Psi'_n)|^2$$

$\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$和$\Psi', \Psi'_1, \Psi'_2, \ldots$之间的联系称为对称性变换.

这样的变换形成群

- 存在单位变换,使Ψ变换成它自己,$\Psi' = \Psi$.
- 对任何一个变换T将Ψ变换成Ψ',存在逆变换T^{-1}将Ψ'变换成Ψ.
- 对两个变换T_1将Ψ变换成Ψ'和T_2将Ψ'变换成Ψ",存在联合变换T_2T_1将Ψ变换成Ψ".

有很多对称性在现实的物理世界中并不存在,这时虽然

$$|(\Psi, \Phi)|^2 = |(\Psi', \Phi')|^2$$

一般说并不成立,但我们仍可讨论满足它的可能的对称性变换,即使它并不真是理论所具有的对称性？

E.P.Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren

(Braunschweig, 1931): pp.251-3 (English translation, Academic Press, Inc,New York,1959).

只允许$\Psi,\Psi_1,\Psi_2,\ldots$和$\Psi',\Psi'_1,\Psi'_2,\ldots$之间的联系通过幺正或反幺正算符联系

$$\Psi'=U\Psi \qquad \Psi'_1=U\Psi_1 \qquad \Psi'_2=U\Psi_2 \qquad \ldots$$

如果U是幺正算符,它必须满足$U^\dagger=U^{-1}$或

$$(U\Phi,U\Psi)=(\Phi,\Psi) \qquad U(\xi\Phi+\eta\Psi)=\xi U\Phi+\eta U\Psi$$

如果U是反幺正算符,它必须满足

$$(U\Phi,U\Psi)=(\Phi,\Psi)^* \qquad U(\xi\Phi+\eta\Psi)=\xi^* U\Phi+\eta^* U\Psi$$

反线性算符A采用如下的厄米共轭算符定义

$$(\Phi,A^\dagger\Psi)\equiv(A\Phi,\Psi)^*=(\Psi,A\Phi)$$

则能够保证幺正和反幺正算符同时都满足条件$U^\dagger=U^{-1}$.

对称性表示定理

正交归一的完备基矢ψ_i：$\Psi = \sum_i a_i\psi_i$，$a_i = (\psi_i, \Phi)$ 是展开系数。

做对称变换$U\Psi = \sum_i Ua_i\psi_i$ 记$\Psi' = U\Psi, \psi_i' = U\psi_i$. ψ_i'也是正交完备基矢 $|(\Phi', \Psi')| = |(\Phi, \Psi)|$

$$\Rightarrow |(\psi_i', \psi_j')| = |(\psi_i, \psi_j)| = \delta_{ij} \Rightarrow (\psi_i', \psi_j') = \left\{\begin{array}{lll} 0 & & i \neq j \\ e^{ic_i} & \xRightarrow{redefine\ \psi_i'} 1 & i = j \end{array}\right\} = \delta_{ij},$$

ψ_i'的基矢数目同ψ_i一样多。由于ψ_i'构成正交完备集，Ψ'也可按其展开：

$\Psi' = \sum_i a_i'\psi_i'$,其中$a_i' = (\psi_i', \Phi')$是展开系数。

$$|(\Phi', \Psi')| = |(\Phi, \Psi)| \Rightarrow |a_i'| = |(\psi_i', \Psi')| = |(\psi_i, \Psi)| = |a_i|.$$

由它推出a_i'和a_i的关系只有两种可能： $\mathbf{a_i' = a_i e^{i\delta_i}}$ $\mathbf{a_i' = a_i^* e^{i\delta_i}}$

一种可能： $\mathbf{a_i' = a_i e^{i\delta_i}}$ $\mathbf{b_i e^{i\delta_{i,b}} + c_i e^{i\delta_{i,c}} = (b_i + c_i)' = (b_i + c_i)e^{i\delta_{i,b+c}} = b_i e^{i\delta_{i,b+c}} + c_i e^{i\delta_{i,b+c}}}$

$\Psi' = \sum_i a_i'\psi_i' = \sum_i a_i e^{i\delta_i}\psi_i'$ $\Phi' = \sum_i b_i e^{i\delta_i}\psi_i' = \sum_i b_i'\psi_i'$ 由于展开系数完全一样

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = (\alpha\Psi + \beta\Phi)' = \sum_i (\alpha a_i + \beta b_i)e^{i\delta_i}\psi_i' = \alpha\Psi' + \beta\Phi' = \alpha U\Psi + \beta U\Phi$$

它说明**U**是线性算符。进一步

$$(\Psi', \Phi') = (\sum_i a_i'\psi_i', \sum_j b_j'\psi_j') = \sum_i a_i'^* b_i' = \sum_i a_i^* b_i = (\sum_i a_i\psi_i, \sum_j b_j\psi_j) = (\Psi, \Phi)$$

说明**U**是幺正算符

对称性表示定理

正交归一的完备基矢ψ_i：$\Psi=\sum_i a_i\psi_i$, $a_i=(\psi_i,\Phi)$ 是展开系数。

做对称变换$U\Psi=\sum_i Ua_i\psi_i$ 记$\Psi'=U\Psi$, $\psi_i'=U\psi_i$. ψ_i'也是正交完备基矢

$$|(\Phi',\Psi')|=|(\Phi,\Psi)|\Rightarrow|(\psi_i',\psi_j')|=|(\psi_i,\psi_j)|=\delta_{ij}\Rightarrow(\psi_i',\psi_j')=\delta_{ij},$$

ψ_i'的基矢数目同ψ_i一样多。由于ψ_i'构成正交完备集，Ψ'也可按其展开：

$\Psi'=\sum_i a_i'\psi_i'$,其中$a_i'=(\psi_i',\Phi')$是展开系数。

$$|(\Phi',\Psi')|=|(\Phi,\Psi)|\Rightarrow|a_i'|=|(\psi_i',\Psi')|=|(\psi_i,\Psi)|=|a_i|.$$

由它推出a_i'和a_i的关系只有两种可能： $\mathbf{a_i'=a_ie^{i\delta_i}}$ $\mathbf{a_i'=a_i^*e^{i\delta_i}}$

另一种可能： $\mathbf{a_i'=a_i^*e^{i\delta_i}}$ $\mathbf{b_i^*e^{i\delta_{i,b}}+c_i^*e^{i\delta_{i,c}}=(b_i^*+c_i^*)'=(b_i^*+c_i^*)e^{i\delta_{i,b+c}}=b_i^*e^{i\delta_{i,b+c}}+c_i^*e^{i\delta_{i,b+c}}}$

$\Psi'=\sum_i a_i'\psi_i'=\sum_i a_i^*e^{i\delta_i}\psi_i'$ $\Phi'=\sum_i b_i'\psi_i'=\sum_i b_i^*e^{i\delta_i}\psi_i'$

$$U(\alpha\Psi+\beta\Phi)=(\alpha\Psi+\beta\Phi)'=\sum_i(\alpha^*a_i^*+\beta^*b_i^*)e^{i\delta_i}\psi_i'=\alpha^*\Psi'+\beta^*\Phi'=\alpha^*U\Psi+\beta^*U\Phi$$

它说明U是反线性算符。进一步

$$(\Psi',\Phi')=(\sum_i a_i'\psi_i',\sum_j b_j'\psi_j')=\sum_i a_i'^*b_i'=(\sum_i a_i^*b_i)^*=(\sum_i a_i\psi_i,\sum_j b_j\psi_j)^*=(\Psi,\Phi)^*$$

说明U是反幺正算符

投影表示

记描述对称性变换T的幺正或反幺正算符为$U(T)$,考虑态所具有的相角任意性

$$U(T_2)U(T_1)\Psi = e^{i\phi_\Psi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi$$

$\phi_\Psi(T_2,T_1)$是相角.我们下面证明,它实际上是不依赖于态的.

将上式应用于$\Psi_{AB}\equiv\Psi_A+\Psi_B$, 则

$$\begin{aligned}
e^{\pm i\phi_{AB}}\Psi_{AB} &= U^{-1}(T_2T_1)e^{i\phi_{AB}}U(T_2T_1)\Psi_{AB} = U^{-1}(T_2T_1)U(T_2)U(T_1)(\Psi_A+\Psi_B)\\
&= U^{-1}(T_2T_1)[U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B]\\
&= U^{-1}(T_2T_1)[e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\Psi_A + e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\Psi_B] = e^{\pm i\phi_A}\Psi_A + e^{\pm i\phi_B}\Psi_B
\end{aligned}$$

对任意的Ψ_A和Ψ_B,上式要求$e^{\phi_{AB}} = e^{i\phi_A} = e^{i\phi_B}$,也就是相因子与态无关

$$U(T_2)U(T_1)\Psi = e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi$$

以下只讨论$\phi_\Psi(T_2,T_1)=0$的情况，多连通的情形（见后面拓扑学讨论）除外 作业8

$U=1$是一个恒等变换,它把态矢量变为它自己,是一个幺正的算符.

任何可以通过一些参数的连续变化变成恒等变换的对称性变换由连续性要求一定要由幺正算符而不是反幺正算符来代表. 特别地,当无穷接近恒等变换时,可以引入无穷小的实参数ϵ来描述,

$$U=1+i\epsilon t$$

反幺正算符不可能是连续算符！

U的幺正性要求t必须是厄米算符,它是一个物理可观测量的候选者

一类由一组有限个实连续参数θ^a描述,所有变换都连续地连接到恒等变换的变换形成的群叫连通李群

对此类变换, 由θ描述的变换$T(\theta)$和由$\bar\theta$描述的变换$T(\bar\theta)$形成的联合变换和相应的幺正算符为:

$$T(\bar\theta)T(\theta)=T(f(\bar\theta,\theta)) \qquad U(T(\bar\theta))U(T(\theta))=U(T(f(\bar\theta,\theta)))$$

如果将$\theta^a=0$取为恒等变换的参数 $f^a(\theta,0)=f^a(0,\theta)=\theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$f^a(\bar\theta,\theta)=\theta^a+\bar\theta^a+f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots$ $\qquad U(T(\theta))=1+i\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^cQ_{bc}+\cdots$

$Q_a, Q_{bc}=Q_{cb}$ 是不依赖于θ和$\bar\theta$的作用到态矢量空间的算符， Q_a 是厄米算符

$$[1+\bar\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^cQ_{bc}+\cdots][1+\theta^aQ_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^cQ_{bc}+\cdots]$$

$$=1+i(\theta^a+\bar\theta^a+f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c+\cdots)Q_a+\frac{1}{2}(\theta^b+\bar\theta^b+\cdots)(\theta^c+\bar\theta^c+\cdots)Q_{bc}+\cdots$$

李群

$$T(\bar\theta)T(\theta) = T(f(\bar\theta,\theta)) \qquad U(T(\bar\theta))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar\theta,\theta)))$$

如果将$\theta^a = 0$取为恒等变换的参数 $f^a(\theta,0) = f^a(0,\theta) = \theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$f^a(\bar\theta,\theta) = \theta^a + \bar\theta^a + f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c + \cdots$ $\quad U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots$

$Q_a, Q_{bc} = Q_{cb}$ 是不依赖于θ和$\bar\theta$的作用到态矢量空间的算符， Q_a 是厄米算符

$$[1 + i\bar\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc} + \cdots][1 + i\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots]$$

$$= 1 + i(\theta^a + \bar\theta^a + f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c + \cdots)Q_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar\theta^b + \cdots)(\theta^c + \bar\theta^c + \cdots)Q_{bc} + \cdots$$

准到$\theta,\bar\theta$的二次幂,它导致 $Q_{bc} = -Q_bQ_c - if^a_{bc}Q_a$

$$[1 + i\bar\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc} + \cdots][1 + i\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots]$$

$$= 1 + i\bar\theta^a Q_a + i\theta^a Q_a - \bar\theta^b\theta^c Q_bQ_c + \frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc} + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots$$

$$1 + i(\theta^a + \bar\theta^a + f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c + \cdots)Q_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar\theta^b + \cdots)(\theta^c + \bar\theta^c + \cdots)Q_{bc}$$

$$= 1 + i\bar\theta^a Q_a + i\theta^a Q_a + \bar\theta^b\theta^c(if^a_{bc}Q_a + Q_{bc}) + \frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc} + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots$$

$$T(\bar\theta)T(\theta) = T(f(\bar\theta,\theta)) \qquad U(T(\bar\theta))U(T(\theta)) = U(T(f(\bar\theta,\theta)))$$

如果将$\theta^a = 0$取为恒等变换的参数 $f^a(\theta,0) = f^a(0,\theta) = \theta^a$ 它限制在恒等变换附近无θ^2项:

$f^a(\bar\theta,\theta) = \theta^a + \bar\theta^a + f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c + \cdots$ $\qquad U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots$

$Q_a, Q_{bc} = Q_{cb}$ 是不依赖于θ和$\bar\theta$的作用到态矢量空间的算符， Q_a 是厄米算符

$$[1 + \bar\theta^a Q_a + \frac{1}{2}\bar\theta^b\bar\theta^c Q_{bc} + \cdots][1 + \theta^a Q_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c Q_{bc} + \cdots]$$

$$= 1 + i(\theta^a + \bar\theta^a + f^a_{bc}\bar\theta^b\theta^c + \cdots)Q_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \bar\theta^b + \cdots)(\theta^c + \bar\theta^c + \cdots)Q_{bc} + \cdots$$

准到$\theta, \bar\theta$二次幂,导致 $Q_{bc} = -Q_bQ_c - if^a_{bc}Q_a$. Q_{bc}对指标b, c对称$\Rightarrow$ **(1):** $0 = -Q_bQ_c + Q_cQ_b - if^a_{bc}Q_a + if^a_{cb}Q_a$

$$[Q_b, Q_c] = iC^a{}_{bc}Q_a \qquad C^a{}_{bc} \equiv -f^a{}_{bc} + f^a{}_{cb} \qquad Q_{bc} = -\frac{1}{2}(Q_bQ_c + Q_cQ_b) - \frac{i}{2}(f^a{}_{bc} + f^a{}_{cb})Q_a$$

上述关系是李代数关系,通过它可定出展开的所有高阶项. 将无穷多的无穷小变化迭加起来可以得到有限大变换。

例如可以定义$T(\theta) \equiv \lim_{N\to\infty} T^N(\theta/N)$,

$$U(T(\theta)) = \lim_{N\to\infty}\left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)\right]^N = \lim_{N\to\infty}[1 + \frac{i}{N}\theta^a Q_a]^N = e^{iQ_a\theta^a}$$

Q_a也叫生成内部对称性变换的生成元。**(2):** $\frac{1}{2}[iQ_a\theta^a]^2 = -\frac{1}{4}\theta^b\theta^c(Q_bQ_c + Q_cQ_b) \Rightarrow f^a_{bc} = -f^a_{cb}$

目前的状态

♣ 有了量子力学的基本假设 态，力学量，几率

♢ 但只泛泛而谈，并未给出确定特别的态和力学量的原则！

♡ 对称性粉墨登场： 它的实现必须通过幺正或反幺正算符

♠ 连续对称性通过生成元厄米算符产生 $\Rightarrow$ 特殊的可观测物理量

¶ 可观测物理量的本征态定义了 特殊的物理态 building block

✠ 呼唤物理体系具有 核心的连续对称性 生成元$\Rightarrow$本征态 ！

准备与约定

协变与逆变的坐标矢量:

逆变坐标四矢量： $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, x^i) = (t, \vec{x})$

协变坐标四矢量： $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (x_0, x_i) = (t, -\vec{x})$

坐标矢量的内积: $x^2 \equiv x_\mu x^\mu = x^\mu x_\mu = t^2 - \vec{x}\cdot\vec{x}$ 理解

除非特别声明，重复指标意味求和爱因斯坦约定。要求和的两个相同指标必须是一个上标,一个下标谁前谁后没有关系;若二者同上或同下,则是错的.

逆变四矢量与协变四矢量的相互转换： $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \qquad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$

Minkovski时空度规张量： $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 与S.Weinberg书相差一负号

$$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\mu'} g_{\mu'\nu} = \delta^\mu_\nu \qquad g_\mu{}^\nu = g_{\mu\mu'} g^{\mu'\nu} = \delta^\nu_\mu$$

准备与约定续

一般的协变与逆变矢量:

逆变四矢量: $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, A^i) = (A^0, \vec{A}) = g^{\mu\nu} A_\nu$

协变四矢量: $V_\mu = (V_0, V_1, V_2, V_3) \equiv (V_0, V_i) = (V^0, -\vec{V}) = g_{\mu\nu} V^\nu$

矢量的内积: $A \cdot V \equiv A_\mu V^\mu = A^\mu V_\mu = A^0 V^0 - \vec{A} \cdot \vec{V} = g_{\mu\nu} A^\mu V^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu V_\nu$

除非特别声明，重复指标意味求和爱因斯坦约定。要求和的两个相同指标必须是一个上标,一个下标谁前谁后没有关系;若二者同上或同下,则是错的.

对坐标微商的逆变四矢量: $\partial^\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, \partial^i) = (\dfrac{\partial}{\partial t}, -\nabla_i) = g^{\mu\nu} \partial_\nu$

对坐标微商的协变四矢量: $\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i) = (\dfrac{\partial}{\partial t}, \nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}) = g_{\mu\nu} \partial^\nu$

达朗贝尔算子: $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$

狭义相对论基本原理: 所有惯性参考系都等价+光速在所有惯性系中都不变

对称性的角度: 物理规律在非齐次洛伦兹变换下保持不变 相对性原理

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

变换参数$\Lambda^\mu{}_\nu$必须保证时空间隔的不变性 光速不变

$$g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

度规张量$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$是对角的，$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu$

$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ 度规选择与S.Weinberg书的选择相差一负号

时空间隔的不变性给出对变换参数$\Lambda^\mu{}_\nu$限制

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \xRightarrow{g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho = g_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu} (\Lambda^{-1})_{\rho\nu} = \Lambda_{\nu\rho}$$

它给出

$$x^\mu \to x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu (x'^\nu - a^\nu) \xRightarrow{x_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu (x'_\nu - a_\nu)} \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho g^{\sigma\rho} = g^{\mu\nu}$$

洛伦兹群

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

用$T(\Lambda, a)$代表用参数$\Lambda^\mu{}_\nu$和a^μ描述的 抽象的 非齐次洛伦兹变换

- 存在单位变换$T(I,0)$, 使x^μ变换成它自己, $x'^\mu = x^\mu$.
- 对任何一个变换$T(\Lambda, a)$将x^μ变换成x'^μ, 存在逆变换 $T^{-1}(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ 作业1 将x'^μ变换成x^μ.
- 对两变换$T(\Lambda, a)$将x^μ变换成x'^μ和$T(\bar\Lambda, \bar a)$将x'^μ 变换成x''^μ,存在联合变换

$$T(\bar\Lambda, \bar a)T(\Lambda, a) = T(\bar\Lambda\Lambda, \bar\Lambda a + \bar a)$$ 作业2 将x^μ变换成x''^μ

将$\Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho g^{\sigma\rho} = g^{\mu\nu}$取行列式$\Lambda^\mu{}_\sigma g^\sigma{}_\rho \Lambda_\nu{}^\rho = g^\mu{}_\nu$和取00分量

$$(\mathrm{Det}\Lambda)^2 = 1 \quad \to \quad \mathrm{Det}\Lambda = \pm 1$$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^0{}_i \Lambda^0{}_i \quad \to \quad \Lambda^0{}_0 \geq +1;\ \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

非齐次洛伦兹变换被DetΛ和$\Lambda^0{}_0$的符号分为四叶:

- 第1叶: $\text{Det}\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$形成子群 作业3
- 第2叶: $\text{Det}\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$可以看成第1叶中的洛伦兹变换与空间反射变换$\mathcal{P}$的乘积 作业4 ，其中空间反射变换$\mathcal{P}$的非零元素定义为:

$$\mathcal{P}^0{}_0 = 1 \qquad \mathcal{P}^1{}_1 = \mathcal{P}^2{}_2 = \mathcal{P}^3{}_3 = -1$$

- 第3叶: $\text{Det}\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$可以看成第1叶中的洛伦兹变换与时间反演变换$\mathcal{T}$的乘积 作业5 ，其中时间反演变换$\mathcal{T}$的非零元素定义为:

$$\mathcal{T}^0_0 = -1 \qquad \mathcal{T}^1_1 = \mathcal{T}^2_2 = \mathcal{T}^3_3 = 1$$

- 第4叶: $\text{Det}\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$可以看成第1叶中的洛伦兹变换与时间反演变换$\mathcal{T}$和空间反射变换$\mathcal{P}$的联合乘积 作业6 。

无穷小行为:

在单位变换附近，变换参数可以写为

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \qquad a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$$

其中$\omega^{\mu}{}_{\nu}$和ϵ^{μ}是无穷小实参数

相应的第一叶的有限大的变换

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = (e^{\omega})^{\mu}{}_{\nu} \quad \text{注意指数上没有 } i\,! \qquad a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$$

$\omega^{\mu}{}_{\nu}$和ϵ^{μ}可以为有限大。

限制:

$$g_{\sigma\rho} = g_{\mu\nu}(g^{\mu}{}_{\sigma} + \omega^{\mu}{}_{\sigma})(g^{\nu}{}_{\rho} + \omega^{\nu}{}_{\rho}) = g_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2) \to \omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma}$$

它把16个$\omega^{\mu}{}_{\nu}$实参数约束为只有6个是独立的:

三个代表坐标系之间的空间坐标架相对转动，三个代表坐标系之间的相对运动

希尔伯特空间中(不同参考系观察者对同一个态矢量描述之间的变换): $\Psi \rightarrow U(\Lambda, a)\Psi$

态没指明对时空的依赖

$U(\Lambda, a) \equiv U(T(\Lambda, a))$. 是洛伦兹群元素在态空间的表示. 在单位变换附近$U(\Lambda, a)$是幺正算符，可写为

$$U(1+\omega, \epsilon) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\rho P^\rho + \cdots$$

$U(1+\omega, \epsilon)$的幺正性和$\omega_{\rho\sigma}$及ϵ_ρ为实参数要求$J^{\rho\sigma}$和P^ρ为厄米算符。

$\omega_{\rho\sigma}$对指标ρ和σ的反对称性要求$J^{\rho\sigma}$对指标ρ和σ也是反对称的

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}$$

非齐次洛伦兹变换的第1叶$\mathrm{Det}\Lambda = 1$,$\Lambda^0{}_0 \geq +1$对非齐次洛伦兹变换参数
$\Lambda = e^\omega$和$a = \epsilon$可以写为:

$$U(e^\omega, \epsilon) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\rho P^\rho}$$

$\omega_{\rho\sigma}$和ϵ_ρ可以有限大. $J^{\rho\sigma}$ 和 P^ρ 是洛伦兹群生成元 在态空间的表示 ！

性质和表达还不知道呢

厄米算符$J^{\rho\sigma}$和P^{ρ}在非齐次洛伦兹变换下的性质

$$T^{-1}(\Lambda,a)=T(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a) \qquad T(\bar{\Lambda},\bar{a})T(\Lambda,a)=T(\bar{\Lambda}\Lambda,\bar{\Lambda}a+\bar{a})$$

$$U(\Lambda,a)U(1+\omega,\epsilon)U^{-1}(\Lambda,a)=U\Big(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1},\Lambda\epsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a\Big)$$

准到ω和ϵ的一次幂，上式化为

$$U(\Lambda,a)[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}+\epsilon_{\rho}P^{\rho}]U^{-1}(\Lambda,a)=\frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+(\Lambda\epsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\mu}P^{\mu}$$

比较等式两边，注意到$J^{\rho\sigma}$对指标ρ和σ的反对称性质，

$$U(\Lambda,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}(J^{\mu\nu}+a^{\mu}P^{\nu}-a^{\nu}P^{\mu})$$

$$U(\Lambda,a)P^{\rho}U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_{\mu}{}^{\rho}P^{\mu}$$

对齐次洛伦兹变换（$a^{\mu}=0$,纯洛伦兹转动）：$J^{\rho\sigma}$是二阶张量，P^{ρ}是四矢量
对纯平移变换（$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=g^{\mu}{}_{\nu}$）：$P^{\rho}$是平移不变的，$J^{\rho\sigma}$不是。

对易关系

$$U(\Lambda,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma(J^{\mu\nu}+a^\mu P^\nu-a^\nu P^\mu)\qquad U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_\mu{}^\rho P^\mu$$

取$\Lambda^\mu{}_\nu=g^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu$ 和$a^\mu=\epsilon^\mu$,准到ω和ϵ的一阶

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\epsilon_\mu P^\mu,J^{\rho\sigma}]=\omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma}+\omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu}+\epsilon^\rho P^\sigma-\epsilon^\sigma P^\rho$$

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}+\epsilon_\mu P^\mu,P^\rho]=\omega_\mu{}^\rho P^\mu$$

比较等式两边$\omega_{\mu\nu}$和ϵ_μ前的量，注意$\omega_{\mu\nu}$和$J^{\mu\nu}$对指标$\mu\nu$的反对称性质

$$i[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]=g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma}-g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma}-g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu}+g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}$$

$$i[P^\mu,J^{\rho\sigma}]=g^{\mu\rho}P^\sigma-g^{\mu\sigma}P^\rho\qquad\qquad [P^\mu,P^\rho]=0$$

将$J^{\mu\nu}$的六个分量和P^μ的四个分量另外取名字

$$\vec{J}\equiv\{J^1,J^2,J^3\}=\{-J_1,-J_2,-J_3\}=\{-J^{23},-J^{31},-J^{12}\}\qquad H\equiv P^0$$

$$\vec{K}\equiv\{K^1,K^2,K^3\}=\{-K_1,-K_2,-K_3\}=\{-J^{10},-J^{20},-J^{30}\}\qquad \vec{P}\equiv\{P^1,P^2,P^3\}$$

$\vec{J}$是通常的角动量算符，$\vec{K}$是推进（**boost**）算符,$\vec{P}$是通常的动量算符作业7,8

$[J^i,J^j]=i\epsilon_{ijk}J^k \qquad [J^i,K^j]=i\epsilon_{ijk}K^k \qquad [K^i,K^j]=-i\epsilon_{ijk}J^k$ $\quad i,j,k$取值1,2,3,ϵ_{ijk}是三维全反对称张量,$\epsilon_{123}=1$

$$[J^i,P^j]=i\epsilon_{ijk}P^k\qquad [K^i,P^j]=-iH\delta_{ij}\qquad [J^i,H]=[P^i,H]=[H,H]=0\qquad [K^i,H]=+iP^i$$

对易关系续

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}$$

$$i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho}P^{\sigma} - g^{\mu\sigma}P^{\rho} \qquad [P^{\mu}, P^{\rho}] = 0$$

Pauli-Lubanski算符: $W^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_{\nu}J_{\rho\sigma}$

$$W^1 = -P_0J_{23} + P_2J_{03} - P_3J_{02} = P^0J^1 + P^2K^3 - P^3K^2$$

$$W^2 = P_0J_{31} + P_3J_{01} - P_1J_{03} = P^0J^2 + P^3K^1 - P^1K^3$$

$$W^3 = -P_0J_{12} + P_1J_{02} - P_2J_{01} = P^0J^3 + P^1K^2 - P^2K^1$$

$$\vec{W} = P^0\vec{J} + \vec{P}\times\vec{K} \qquad W^0 = P_1J_{23} + P_2J_{31} + P_3J_{12} = \vec{P}\cdot\vec{J}$$

$$i[W^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho}W^{\sigma} - g^{\mu\sigma}W^{\rho} \qquad [P^{\mu}, W^{\rho}] = 0 \qquad P_{\mu}W^{\mu} = 0$$

Casimir算子: $P^{\mu}P_{\mu}$ $\quad W^{\mu}W_{\mu}$

$$[P^{\mu}P_{\mu},\ P^{\rho}] = 0 \qquad [P^{\mu}P_{\mu}, J^{\rho\sigma}] = 0$$

$$[W^{\mu}W_{\mu},\ P^{\rho}] = 0 \qquad [W^{\mu}W_{\mu}, J^{\rho\sigma}] = 0$$

单粒子态

非齐次洛伦兹变换（至少是其第一叶Det$\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$）和某些可能的内部对称性变换是量子力学态空间应该具有的对称性

将物理态按其在非齐次洛伦兹变换下的行为分类, 此分类可以用来确定在非齐次洛伦兹变换和内部对称性变换下哪些态在是可以相互转化的，那些不能

将单粒子态定义为一组算符的本征态

能量和动量算符之间是相互对易的。而且由于时空对称性与内部对称性之间应该是没有关系的，它导致能量和动量算符应该与内部对称性变换的生成元算符$Q_a (a = 1, 2, \cdots)$对易 作业10 。一般说生成元算符Q_a之间不一定相互对易，我们考虑它其中的一个相互对易的子部分$Q_{\bar{a}}$,它们和能量动量算符之间可以有共同本征态。我们将单粒子态定义为它们的本征态$\Psi_{p,\sigma}$

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma} \qquad Q_{\bar{a}} \Psi_{p,\sigma} = q_{\bar{a}} \Psi_{p,\sigma}$$

其中p^μ和$q_{\bar{a}}$是态$\Psi_{p,\sigma}$的能量动量和内部对称性生成元本征值。σ用来标记除能动量外所有其它的量子数(以后阐明).

我们把σ取纯分立值的态定义为单粒子态

为什么单粒子态要选为能动量算符的本征态？

♣ 为什么选为能量本征态？ 因为能量算符控制体系的演化！(如何定义体系的演化?)

♢ 单粒子态的能量本征值不随时间变化！

♡ 本征态随时间演化的效应只是一个相角！

♠ 如果选与能量不对易算符的本征态怎么样？ 本征值、态随时间变化！

¶ 为什么选动量本征态?

✠ 能量动量随不同参考系相互转化！

ℜ 动量标记的引入使得单粒子态成为有方向的态！

对单粒子态定义的感觉:

♣ 太简单!

♢ 没有大小的概念!

♡ 没有基本和复合(结构)的概念?

♠ 没有时间和位置的概念? 时空坐标目前只是观察者的标记!

¶ 本征态的含义?

✠ 分立性(量子性)是人为的?

纯时空平移变换$U(1,a)$是可以连续变形到单位变换的变换,

它只能是幺正算符,不可能是反幺正算符

利用

$$U(e^{\omega},\epsilon)=e^{\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}+i\epsilon_{\rho}P^{\rho}}$$

在纯时空平移变换下

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma}=e^{ia_{\mu}P^{\mu}}\Psi_{p,\sigma}=e^{ia_{\mu}p^{\mu}}\Psi_{p,\sigma}$$ 物理诠释?

Casimir算符:

$$P^{\mu}P_{\mu}\Psi_{p,\sigma}=p^{\mu}p_{\mu}\Psi_{p,\sigma}=M^{2}\Psi_{p,\sigma}$$ $W^{\mu}W_{\mu}\Psi_{p,\sigma}=?$ 见后!

注意: 质量参数M^2在这里是作为洛伦兹不变量P^2的取值而被引入理论的!

纯时空转动变换$U(\Lambda,0)$是可以连续变形到单位变换的变换,

它只能是幺正算符,不可能是反幺正算符

定义由Λ和$a^\mu=0$导致的纯时空转动变换算符为$U(\Lambda)\equiv U(\Lambda,0)$,结合

$$U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a)=\Lambda_\mu{}^\rho P^\mu$$

在纯时空转动变换下

$$\begin{aligned}
P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= U(\Lambda)[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p,\sigma}=U(\Lambda)[U(\Lambda^{-1})P^\mu U^{-1}(\Lambda^{-1})]\Psi_{p,\sigma}\\
&= U(\Lambda)(\Lambda_\rho^{-1\mu}P^\rho)\Psi_{p,\sigma}=\Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}
\end{aligned}$$

$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$是四动量本征值为$\Lambda p$的态. 单粒子态有运动的方向!

单粒子态按动量进行分类

$p^2 \equiv g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$和$p^0$的符号(当$p^2 \geq 0$时)在洛伦兹变换下是不变的，并且任何两个具有同样的p^2值和p^0符号(当$p^2 \geq 0$时)的动量一定可以通过某个洛伦兹变换相联系,作业9可用这两个非齐次洛伦兹变换的不变量的取值标记不同的动量类

- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 > 0$ 描述的是有质量的正能态
- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 < 0$ 描述的是有质量的负能态
- $p^2 = 0, \quad p^0 > 0$ 描述的是无质量的正能态
- $p^2 = 0, \quad p^0 < 0$ 描述的是无质量的负能态
- $p^2 = -N^2 < 0$ 描述的是虚质量态
- $p^\mu = 0$ 描述的是真空态

单粒子态按动量进行分类

每类动量中引入基本参考动量k^μ,使这类动量中任意动量都可从此参考动量出发通过洛伦兹变换得到

$$p^\mu = L^\mu_{\ \nu}(p)k^\nu$$

$L^\mu_{\ \nu}(p)$依赖于动量p和参考动量k, 对的不同动量类，$k^\mu = (k^0, k^1, k^2, k^3)$选取为:

- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 > 0 \qquad k^\mu = (M, 0, 0, 0)$
- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 < 0 \qquad k^\mu = (-M, 0, 0, 0)$
- $p^2 = 0, \quad p^0 > 0 \qquad k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ $\quad$ κ是频率!
- $p^2 = 0, \quad p^0 < 0 \qquad k^\mu = (-\kappa, 0, 0, \kappa)$
- $p^2 = -N^2 < 0 \qquad k^\mu = (0, 0, 0, N)$
- $p^\mu = 0 \qquad k^\mu = (0, 0, 0, 0)$

对每种参考动量k，研究使它不变的子洛伦兹变换$W^\mu_{\ \nu}k^\nu = k^\mu$ W形成群:

- 存在单位变换$W = 1$.
- 存在逆变换W^{-1}.
- 对两个变换W'和W,存在联合变换$W" = W'W$.

Little Group W

对不同类的基本参考动量k^μ对应的W变换的内容不一定一样,它主要由参考动量为零的分量张开的空间的大小决定:

- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 > 0$ 产生**3**个空间坐标之间的所有转动变换和空间反射变换$k^\mu = (M, 0, 0, 0)$
  描述它的连续对称性群是**SO(3)**群 详细讨论见后

- $p^2 = M^2 > 0, \quad p^0 < 0$ $k^\mu = (-M, 0, 0, 0)$ 同上**SO(3)**群

- $p^2 = 0, \quad p^0 > 0$ 产生**2**个空间坐标之间的所有转动变换 两维空间的反射变换可以用纯转动变换来生成 及那些不能化成纯**2**个空间坐标之间转动但保持$k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$不变的所有变换 对有质量的参考动量$k^\mu = (\pm M, 0, 0, 0)$,不存在这种情况，因为这时参考动量不为零的分量只有一个，不足以生成非平庸的不能化成纯**3**个空间坐标之间转动但保持$k^\mu = (\pm M, 0, 0, 0)$不变的变换. 描述它的对称性群是**ISO(2)**群

Little Group W

对不同类的基本参考动量k^μ对应的W变换的内容不一定一样,它主要由参考动量为零的分量张开的空间的大小决定:

- $p^2 = 0, \qquad p^0 < 0$ 产生2个空间坐标之间的所有转动变换及那些不能化成纯2个空间坐标之间转动但保持$k^\mu = (-\kappa, 0, 0, \kappa)$不变的所有变换.描述它的对称性群也是ISO(2)群
- $p^2 = -N^2 < 0$ 产生2个空间坐标和1个时间坐标之间的所有转动变换和时间坐标的反演变换.描述它的连续对称性群是SO(2,1)群（与反演联合成为2+1空间的洛伦兹群） $k^\mu = (0, 0, 0, N)$
- $p^\mu = 0$ 产生3个空间坐标和1个时间坐标之间的所有转动变换及空间坐标的反射变换和时间坐标的反演变换.
$k^\mu = (0, 0, 0, 0)$描述它的连续对称性群是SO(3,1)群（与反演联合成为3+1空间的洛伦兹群）

单粒子态按动量进行分类 $P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=\Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$

$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$是动量为$\Lambda p$的态. 此类态可用不同的下标$\sigma'$来标记.
$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$是各种可能的$\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$的线性组合

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=\sum_{\sigma'}C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

$C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$的结构: 先研究$\Psi_{p,\sigma}$对指标$\sigma$的依赖结构; 对固定不求和的$\sigma$

$$(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})\delta_{\sigma\sigma'}=(U(L(p))\Psi_{k,\sigma},U(L(p))\Psi_{k',\sigma'})$$

$p\equiv L(p)k \qquad p'\equiv L(p)k'$

$$=(\sum_{\sigma_1}C_{\sigma_1\sigma}(L(p),k)\Psi_{p,\sigma_1},\sum_{\sigma_1'}C_{\sigma_1'\sigma'}(L(p),k')\Psi_{p',\sigma_1'})$$

$$=\sum_{\sigma_1}C^*_{\sigma_1\sigma}(L(p),k)C_{\sigma_1\sigma'}(L(p),k')(\Psi_{p,\sigma_1},\Psi_{p',\sigma_1})$$

$(\Psi_{p,\sigma_1},\Psi_{p',\sigma_1'})\propto\delta(p-p')\delta_{\sigma_1\sigma_1'}$

$$=(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})\frac{k^0}{p^0}\sum_{\sigma_1}C^*_{\sigma_1\sigma}(L(p),k)C_{\sigma_1\sigma'}(L(p),k')$$

$$C^\dagger(L(p),k)C(L(p),k)=\frac{p^0}{k^0}I\xRightarrow{C\text{矩阵对角化}\lambda}C(L(p),k)=\sqrt{\frac{p^0}{k^0}}S\lambda S^{-1}\qquad\lambda^\dagger\lambda=1$$

时空转动

单粒子态按动量进行分类 $P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$

$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$是动量为$\Lambda p$的态. 此类态可用不同的下标$\sigma'$来标记.

$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$是各种可能的$\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$的线性组合

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \qquad C(L(p),k) = \sqrt{\frac{p^0}{k^0}} S\lambda S^{-1}$$

S的p依赖?

$$\lambda^\dagger\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \quad U(\Lambda)\sum_{\sigma_1}\Psi_{p,\sigma_1}S_{\sigma_1\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma_1}(\Lambda,p)S_{\sigma_1\sigma}\Psi_{\Lambda p,\sigma'} = \sum_{\sigma'}[S^{-1}C(\Lambda,p)S]_{\sigma_1\sigma}S_{\sigma'\sigma_1}\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

对每一个动量$\vec{p}$ 重新定义$\Psi_{p,\sigma} \to \sum_{\sigma'}\Psi_{p,\sigma'}S_{\sigma'\sigma}$，$C(\Lambda,p) \to SC(\Lambda,p)S^{-1}$ 在新的基上：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \qquad C_{\sigma'\sigma}(L(p),k) = \sqrt{\frac{p^0}{k^0}}\lambda_\sigma\delta_{\sigma'\sigma} \qquad |\lambda_\sigma| = 1$$

$$U(L(p))\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(L(p),k)\Psi_{p,\sigma'} = \lambda_\sigma\sqrt{\frac{p^0}{k^0}}\Psi_{p,\sigma}$$

重新选择态的相角$\Psi_{k,\sigma} \to \Psi_{k,\sigma}/\lambda_\sigma \quad \Rightarrow \quad \Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}U(L(p))\Psi_{k,\sigma}$

注：后面选新基上$\Psi_{k,\sigma}$是J^3的本征态，对应旧基上$\Psi_{k,\sigma}$是J^3本征态的叠加态！

单粒子态按动量进行分类 $P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$

$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$是动量为$\Lambda p$的态. 此类态可用不同的下标$\sigma'$来标记.

$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$是各种可能的$\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$的线性组合

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

$C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$的结构： 已得到的$\Psi_{p,\sigma}$对指标$\sigma$的依赖结构

$$\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma} \qquad N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}$$

在纯时空转动变换下

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} = N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}$$

$L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$作用到参考动量$k$上不改变其值，

$$[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)]^\mu{}_\nu k^\nu = [L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)k]^\mu = [L^{-1}(\Lambda p)\Lambda p]^\mu = k^\mu$$

$L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$属于使参考动量$k$保持不变的洛伦兹变换$W$

单粒子态按动量进行分类 $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=\sum_{\sigma'}C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$

$$\Psi_{p,\sigma}\equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma} \qquad N(p)=\sqrt{\frac{k^0}{p^0}}$$

在纯时空转动变换下

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}=N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}$$

$L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$属于使参考动量$k$保持不变的洛伦兹变换$W$，定义：

$$W(\Lambda,p)\equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$$ 对使参考动量k保持不变的洛伦兹变换W

$$U(W)\Psi_{k,\sigma}=\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}$$ 作业11

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=N(p)U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda,p))\Psi_{k,\sigma}=N(p)U(L(\Lambda p))\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{k,\sigma'}$$

$$=\left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\right)\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$ $C_{\sigma\sigma'}(\Lambda,p)$可用$D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))$和$N(p)$表达

单粒子态在时空转动和时空平移联合变换下的行为:

时空转动:

$$U(\Lambda,0)\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

时空平移:

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma}=e^{ia_\mu p^\mu}\Psi_{p,\sigma}$$

时空转动和时空平移联合变换: $T(\bar\Lambda,\bar a)T(\Lambda,a)=T(\bar\Lambda\Lambda,\bar\Lambda a+\bar a)$

$$U(\Lambda,a)\Psi_{p,\sigma}=U(1,a)U(\Lambda,0)\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))U(1,a)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

$$=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}e^{ia_\mu(\Lambda p)^\mu}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

单粒子态按动量进行分类

不讨论的态

- 负能态　在物理上至今尚未发现 实际与对应的正能态具有类似的性质
- 虚质量态　至今尚未发现 重新选择真空使其消失; 只有一维 tachyon 和无穷维么正表示
- 真空态　$\Psi_0 \equiv \Psi_{p=0}$ 要求它唯一 ? 只有一维恒等和无穷维 spurion 么正表示
  $U(\Lambda)\Psi_0 = \Psi_0$ 可能的相角可被吸收到$U(\Lambda)$的重新定义中去

只讨论有质量和无质量的正能态

角动量的z分量和能量及动量算符作用到能生成这样态的参考动量本征态$\Psi_{k,\sigma}$ 上相互对易

选参考动量的本征态$\Psi_{k,\sigma}$为J^3的本征态,

$$J^3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}$$

其中,σ是本征值.

有质量的正能单粒子态 $k^{\mu}=(M,0,0,0)$

$$L^i_k(p)=\delta_{ik}+(\gamma-1)\hat{p}_i\hat{p}_k \qquad L^i{}_0(p)=L^0{}_i(p)=\hat{p}_i\sqrt{\gamma^2-1}=\frac{p^i}{M} \qquad \hat{p}_i\equiv\frac{p^i}{|\vec{p}|}$$

$$L^0{}_0(p)=\gamma\equiv\frac{\sqrt{\vec{p}^2+M^2}}{M} \qquad W(\Lambda,p)\equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \qquad L(p)=R(\hat{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\hat{p})_{\text{沿}\vec{p}\text{的推进}}$$

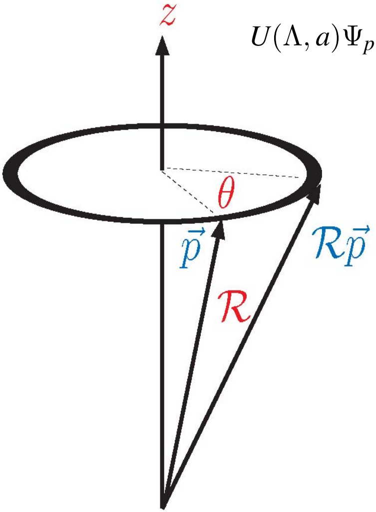
$R(\hat{p})$**是把z轴转到**$\hat{p}$**的纯转动;** $B(|\vec{p}|)$**是沿**z**轴的推进** $B(|\vec{p}|)=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2-1}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sqrt{\gamma^2-1} & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$

对任意空间转动$\mathcal{R}$**:** $W(\mathcal{R},p)=L^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}L(p)=R(\mathcal{R}\hat{p})B^{-1}(|\vec{p}|)R^{-1}(\mathcal{R}\hat{p})\mathcal{R}R(\hat{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\hat{p})$

$$R^{-1}(\mathcal{R}\hat{p})\mathcal{R}R(\hat{p})\xlongequal{\text{将}z\text{轴转到}\hat{p}\text{,再转到}\mathcal{R}\hat{p}\text{, 再转回}z\text{轴}=\text{绕}z\text{轴的旋转}}R(\theta)\xlongequal{\text{与}B(|\vec{p}|)\text{对易}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$W(\mathcal{R},p)=L^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}L(p)=R(\mathcal{R}\hat{p})B^{-1}(|\vec{p}|)R(\theta)B(|\vec{p}|)R^{-1}(\hat{p})=R(\mathcal{R}\hat{p})R(\theta)R^{-1}(\hat{p})=\mathcal{R}$$

时空转动



$$U(\Lambda,a)\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}e^{ia_\mu(\Lambda p)^\mu}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

有质量的正能态:

$$\mathcal{R}L(p)=L(\mathcal{R}p)\mathcal{R}$$

一般地: 先沿$\vec{p}$方向把p放到模为Λp,

动量的大小

再用纯转动$\mathcal{R}$转到Λp方向

$$\Lambda L(p)=L(\Lambda p)\mathcal{R}$$

$$W(\Lambda,p)=L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)=\mathcal{R}$$

证明$B(|\vec{p}|)$是推进变换:

$$L(p) = R(\hat{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\hat{p})$$

$$B(|\vec{p}|) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\gamma^2-1} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \operatorname{arc\,cosh}(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{arc\,cosh}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \operatorname{arc\,cosh}(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{arc\,cosh}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} \operatorname{arc\,cosh}^{2n}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{arc\,cosh}^{2n}(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \operatorname{arc\,cosh}(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{arc\,cosh}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \operatorname{arc\,cosh}^{2n+1}(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{arc\,cosh}^{2n+1}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=0} \frac{1}{(2n)!}\operatorname{arc\,cosh}^{2n}(\gamma) = \gamma \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{(2n+1)!}\operatorname{arc\,cosh}^{2n+1}(\gamma) = \sinh(\operatorname{arc\,cosh}^{2n+1}(\gamma)) = \sqrt{\gamma^2-1}$$

纯推进变换: $\omega_3^{\ 0} = \omega_{03} = -\omega_{30} = \omega_0^{\ 3} = \operatorname{arc\,cosh}(\gamma)$ $\qquad \omega_\rho^{\ \sigma} \overset{\text{其它}}{=\!=\!=\!=} 0$

小群是洛伦兹变换前后的动量之间的空间转动 $L(p)=R(\hat{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\hat{p})$

$$B_\gamma=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2-1}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sqrt{\gamma^2-1} & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\qquad B_\gamma^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -\sqrt{\gamma^2-1}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\sqrt{\gamma^2-1} & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

沿z轴的p和Λp: 若$\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$分别是三个沿z轴推进对应的$\gamma$,且$\gamma_1$是连接$\gamma_0,\gamma_2$的推进

$p\equiv B_{\gamma_0}k$

$\Lambda p\equiv B_{\gamma_2}k$

$$\begin{pmatrix}\gamma_1 & 0 & 0 & \sqrt{\gamma_1^2-1}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sqrt{\gamma_1^2-1} & 0 & 0 & \gamma_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M\gamma_0\\ 0\\ 0\\ M\sqrt{\gamma_0^2-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M\gamma_2\\ 0\\ 0\\ M\sqrt{\gamma_2^2-1}\end{pmatrix}$$

则: $\gamma_2=\gamma_0\gamma_1+\sqrt{\gamma_0^2-1}\sqrt{\gamma_1^2-1}$ 及: $\sqrt{\gamma_2^2-1}=\gamma_0\sqrt{\gamma_1^2-1}+\gamma_1\sqrt{\gamma_0^2-1}\ \Rightarrow\ B_{\gamma_1}B_{\gamma_0}=B_{\gamma_2}$

沿动量方向取为z方向的推进变换导致的小群:

$L(p)\|_{\vec{p}\|\vec{e}_z}=B_{\gamma_0}\qquad L(\Lambda p)\|_{\vec{p}\|\vec{e}_z}=B_{\gamma_2}\qquad \Lambda\equiv B_{\gamma_1}\qquad W(\Lambda,p)\|_{\vec{p}\|\vec{e}_z}=B_{\gamma_2}^{-1}B_{\gamma_1}B_{\gamma_0}=B_{\gamma_2}^{-1}B_{\gamma_2}=1$

一般p和Λ: 用沿$\vec{p}$推进B把p放到模为Λp,再纯转动$\mathcal{R}$到Λp方向: $\Lambda=\mathcal{R}B\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'p=p$

$$W(\Lambda,p)=L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)=L^{-1}(\mathcal{R}Bp)\mathcal{R}L(Bp)L^{-1}(Bp)BL(p)=W(\mathcal{R},Bp)W(B,p)=W(\mathcal{R},Bp)=\mathcal{R}$$

有质量的正能单粒子态 $k^\mu = (M, 0, 0, 0)$

$$L^i_k(p) = \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k \qquad L^i{}_0(p) = L^0{}_i(p) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{p^i}{M} \qquad \hat{p}_i \equiv \frac{p^i}{|\vec{p}|}$$

$$L^0{}_0(p) = \gamma \equiv \frac{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}{M} \qquad W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \qquad W(\Lambda, p) = \mathcal{R}$$ $\mathcal{R}$是把p转到Λp方向所须的空间转动！

$W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = \mathcal{R}$保证参考动量$k^\mu = (M, 0, 0, 0)$不变属于产生3个空间坐标之间的转动变换和空间反射变换对纯三维空间转动$R_{ik} \equiv (e^\Theta)_{ik}$($R$是正交矩阵$RR^T = 1$要求$\Theta_{ik} = -\Theta_{ki}$),其幺正的表示矩阵$D(R)$可分为一系列不可约表示$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R)$的直和,其中标记为$(j)$的不可约表示的维数为$2j+1$, j叫表示的自旋,可取值$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$. 不可约表示$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R)$可以写为

将前面洛伦兹群元的处理应用于3维空间: $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(e^\Theta) = (e^{\frac{i}{2}\Theta_{ik}J^{(j)}_{ik}})_{\sigma'\sigma} \qquad -(J^{(j)}_{12})_{\sigma'\sigma} = (J^{(j),3})_{\sigma'\sigma} = \sigma\delta_{\sigma'\sigma}$

$$-(J^{(j)}_{23} \pm iJ^{(j)}_{31})_{\sigma'\sigma} = (J^{(j),1} \pm iJ^{(j),2})_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma',\sigma\pm1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}$$

其中σ取值$j, j-1, \cdots, -j+1, -j$.
有质量的正能单粒子态可以分为各种自旋态, 自旋取值整数或半整数.

有质量的正能单粒子态 $k^\mu = (M, 0, 0, 0)$

$$L^i_k(p) = \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i \hat{p}_k \qquad L^i{}_0(p) = L^0{}_i(p) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{p^i}{M} \qquad \hat{p}_i \equiv \frac{p^i}{|\vec{p}|}$$

$$L^0{}_0(p) = \gamma \equiv \frac{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}{M} \qquad W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \qquad W(\Lambda, p) = \mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$是把p转到Λp方向所须的空间转动！

不可约表示$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R)$可以写为

$$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(e^\Theta) = (e^{\frac{i}{2}\Theta_{ik}J^{(j)}_{ik}})_{\sigma'\sigma} \qquad -(J^{(j)}_{12})_{\sigma'\sigma} = (J^{(j),3})_{\sigma'\sigma} = \sigma\delta_{\sigma'\sigma}$$

$$-(J^{(j)}_{23} \pm iJ^{(j)}_{31})_{\sigma'\sigma} = (J^{(j),1} \pm iJ^{(j),2})_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma',\sigma\pm 1}\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}$$

其中σ取值$j, j-1, \cdots, -j+1, -j$.

有质量的正能单粒子态可以分为各种自旋态,自旋取值整数或半整数.

在纯时空转动变换下

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

SO(3)群的不可约表示 $J^2 \equiv (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2 \Rightarrow [J^2, J^i] = 0$

将本征态选为J^2和J^3的共同本征态$\Phi_{\lambda,\sigma}$：

$$J^2 \Phi_{\lambda,\sigma} = \lambda \Phi_{\lambda,\sigma} \qquad J^3 \Phi_{\lambda,\sigma} = \sigma \Phi_{\lambda,\sigma}$$

引入升降算符$J_\pm = J^1 \pm iJ^2$

$$\begin{aligned} J^3 J_+ \Phi_{\lambda,\sigma} &= (J_+ J^3 + J_+)\Phi_{\lambda,\sigma} = (\sigma + 1) J_+ \Phi_{\lambda,\sigma} \\ J^3 J_- \Phi_{\lambda,\sigma} &= (J_- J^3 - J_-)\Phi_{\lambda,\sigma} = (\sigma - 1) J_+ \Phi_{\lambda,\sigma} \\ J^2 J_\pm \Phi_{\lambda,\sigma} &= J_\pm J^2 \Phi_{\lambda,\sigma} = \lambda J_\pm \Phi_{\lambda,\sigma} \end{aligned}$$

$$J_\pm \Phi_{\lambda,\sigma} = C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}$$

$$|C_\pm(\lambda,\sigma)|^2 = (C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}, C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}) = (J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}, J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}) = (\Phi_{\lambda,\sigma}, J_\mp J_\pm \Phi_{\lambda,\sigma})$$

$$= (\Phi_{\lambda,\sigma}, [J^2 - (J^3)^2 \mp J^3]\Phi_{\lambda,\sigma}) = \lambda - \sigma(\sigma \pm 1)$$

这里假设 J^i 是厄米的

$$C_\pm(\lambda,\sigma) = \sqrt{\lambda - \sigma(\sigma \pm 1)}$$

SO(3)群的不可约表示

$$J^2\Phi_{\lambda,\sigma} = \lambda\Phi_{\lambda,\sigma} \qquad J^3\Phi_{\lambda,\sigma} = \sigma\Phi_{\lambda,\sigma}$$

$$J^3J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma} = (\sigma\pm1)J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma} \qquad J^2J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma} = \lambda J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}$$

进一步利用$J^2 - (J^3)^2 = \frac{1}{2}(J_-^\dagger J_- + J_+^\dagger J_+)$ $\quad J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma} = \sqrt{\lambda-\sigma(\sigma\pm1)}\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}$

$$\lambda-\sigma^2=(\lambda-\sigma^2)(\Phi_{\lambda,\sigma},\Phi_{\lambda,\sigma})=(\Phi_{\lambda,\sigma},[J^2-(J^3)^2]\Phi_{\lambda,\sigma})=\frac{1}{2}(\Phi_{\lambda,\sigma},[J_-^\dagger J_- + J_+^\dagger J_+]\Phi_{\lambda,\sigma})\geq 0$$

它意味着σ有上限和下限值,设此上限值为j,下限值为j',则$J_+\Phi_{\lambda,j} = 0, J_-\Phi_{\lambda,j'} = 0$

$$0 = J_-J_+\Phi_{\lambda,j} = [J^2 - (J^3)^2 - J^3]\Phi_{\lambda,j} = [\lambda - j(j+1)]\Phi_{\lambda,j}$$
$$0 = J_+J_-\Phi_{\lambda,j'} = [J^2 - (J^3)^2 + J^3]\Phi_{\lambda,j'} = [\lambda - j'(j'-1)]\Phi_{\lambda,j'}$$

$\lambda = j(j+1) = j'(j'-1)$ $\quad$ j'可解出为$j' = -j$或$j' = j+1$;$j' = j+1$显然是没意义的. σ的取值范围为$-j\leq\sigma\leq j$

要求这个变化范围$j-(-j)$为整数, 我们得到 j只可能为整数或半整数

$$J^2\Phi_{j(j+1),\sigma} = j(j+1)\Phi_{j,\sigma} \qquad J^3\Phi_{j(j+1),\sigma} = \sigma\Phi_{j(j+1),\sigma} \qquad \sigma = -j,-j+1,\cdots,j-1,j$$

$$(J_\pm)^j_{\sigma',\sigma} \equiv (\Phi_{j(j+1),\sigma'}, J_\pm\Phi_{j(j+1),\sigma}) = C_\pm(j(j+1),\sigma)(\Phi_{j(j+1),\sigma'},\Phi_{j(j+1),\sigma\pm1})$$
$$= \sqrt{j(j+1)-\sigma(\sigma\pm1)}\delta_{\sigma',\sigma\pm1} = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\delta_{\sigma',\sigma\pm1}$$
$$(J^3)^j_{\sigma',\sigma} \equiv (\Phi_{j(j+1),\sigma'}, J^3\Phi_{j(j+1),\sigma}) = \sigma(\Phi_{j(j+1),\sigma'},\Phi_{j(j+1),\sigma}) = \sigma\delta_{\sigma',\sigma}$$

有质量的正能单粒子态的Casimir算符:

$$W^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu J_{\rho\sigma} \qquad \Psi_{p,\sigma} = N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma}$$

$$P^\mu P_\mu \Psi_{p,\sigma} = M^2\Psi_{p,\sigma} \qquad W^\mu W_\mu \Psi_{p,\sigma} = N(p)U(L(p))W^\mu W_\mu \Psi_{k,\sigma}$$

$$\begin{aligned} W^\mu W_\mu \Psi_{k,\sigma} &= W^\mu \frac{M}{2}\epsilon_\mu{}^{0\rho\sigma}J_{\rho\sigma}\Psi_{k,\sigma} = W^l \frac{M}{2}\epsilon_l{}^{0ji}J_{ji}\Psi_{k,\sigma} \qquad i\epsilon_l{}^{0ji}[W^l, J_{ji}] = \epsilon_l{}^{0ji}(g_j^l W_i - g_i^l W_j) = 0 \\ &= \frac{M^2}{4}\epsilon^{l0j'i'}\epsilon_l{}^{0ji}J_{j'i'}J_{ji}\Psi_{k,\sigma} = -\frac{M^2}{2}J^{ji}J_{ji}\Psi_{k,\sigma} = -M^2 J^2 \Psi_{k,\sigma} \\ &= -M^2 j(j+1)\Psi_{k,\sigma} \end{aligned}$$

$$W^\mu W_\mu \Psi_{p,\sigma} = -M^2 j(j+1)\Psi_{p,\sigma} \qquad \sigma = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$$

对有质量正能单粒子态, j在洛伦兹变换下不变, σ不是. 只能用j标记粒子态！
洛伦兹变换可以把σ从一个取值变为任何一个其它的取值！

无质量的正能单粒子态 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \qquad L(p) = R(\hat{p})B(\frac{|\vec{p}|}{\kappa})$$

$R(\hat{p})$是把z轴转到单位矢量$\hat{p}$的纯转动变换.$B(u)$是沿z轴的推进变换:

$$U(R(\hat{p})) = e^{i\phi J_3}e^{i\theta J_2} \quad \hat{p} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \quad B(u) \equiv \begin{pmatrix} (u^2+1)/2u & 0 & 0 & (u^2-1)/2u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (u^2-1)/2u & 0 & 0 & (u^2+1)/2u \end{pmatrix}$$

W由产生2个空间坐标之间的转动变换及那些不能化成纯2个空间坐标之间转动但保持$k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$不变的变换构成.其幺正的表示矩阵$D(W)$是对角的

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma}\delta_{\sigma'\sigma}$$

θ是2个空间坐标之间的转动角与Λ的关系见后; σ是角动量的第三分量的本征值.因参考动量$\vec{k}$沿z轴方向,σ给出的是角动量算符在运动方向上投影的本征值,称螺旋度,它只能取值整数或半整数.

无质量的正能单粒子态 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \qquad L(p) = R(\hat{p})B(\frac{|\vec{p}|}{\kappa})$$

$R(\hat{p})$是把z轴转到单位矢量$\hat{p}$的纯转动变换.$B(u)$是沿z轴的推进变换:

$$B(u) \equiv \begin{pmatrix} (u^2+1)/2u & 0 & 0 & (u^2-1)/2u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (u^2-1)/2u & 0 & 0 & (u^2+1)/2u \end{pmatrix}$$

无质量的正能单粒子态可以分为各种螺旋度态,螺旋度取值整数或半整数.
对螺旋度为σ无质量的正能单粒子态,在纯时空转动变换下

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma}\delta_{\sigma'\sigma} \qquad U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma}\Psi_{\Lambda p,\sigma}$$

ISO(2)群的不可约表示

保证参考动量$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$不变的洛仑兹变换$W$

引入类时四矢量$t^\mu=(1,0,0,0)$,考虑能使它保持不变的变换. 先将W作用t上得到的仍是一类时四矢量Wt,它还满足

$$
\begin{aligned}
(Wt)^\mu(Wt)_\mu &= t^\mu(W^{-1}Wt)^\mu = t^\mu t_\mu = 1 \\
(Wt)^\mu k_\mu &= t^\mu(W^{-1}k)_\mu = t^\mu k_\mu = 1
\end{aligned}
$$

满足第二个条件的Wt的最一般形式为$(Wt)^\mu=(1+\zeta,\alpha,\beta,\zeta)$, 它还受第一个条件的限制, $(1+\zeta)^2-\zeta^2-\alpha^2-\beta^2=1$, 给出约束$\zeta=(\alpha^2+\beta^2)/2$. W作用到t上和如下洛仑兹变换作用到t上是一样的

$$
S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix} 1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta \end{bmatrix}
$$

$S^{-1}W$保持类时四矢量$t^\mu=(1,0,0,0)$不变. 我们选的$S^\mu{}_\nu$同样保持参考动量$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$不变, $S^{-1}W$保持参考动量$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$不变. 结合起来,$S^{-1}W$只能是绕第三轴的纯转动.

ISO(2)群的不可约表示

保证参考动量$k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$不变的洛仑兹变换$W$

引入类时四矢量$t^\mu = (1, 0, 0, 0)$,考虑能使它保持不变的变换. 先将W作用t上得到的仍是一类时四矢量Wt,它还满足

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu (W^{-1}Wt)^\mu = t^\mu t_\mu = 1$$
$$(Wt)^\mu k_\mu = t^\mu (W^{-1}k)_\mu = t^\mu k_\mu = 1$$

W作用到t上和如下洛仑兹变换作用到t上是一样的

$S^{-1}W$保持类时四矢量$t^\mu = (1, 0, 0, 0)$不变. 我们选的$S^\mu{}_\nu$同样保持参考动量$k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$不变, $S^{-1}W$保持参考动量$k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$不变. 结合起来,$S^{-1}W$只能是绕第三轴的纯转动, $S^{-1}(\alpha, \beta)W = R(\theta)$

$$S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix} 1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta \end{bmatrix} \quad R^\mu{}_\nu(\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W(\theta,\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta)R(\theta)$$

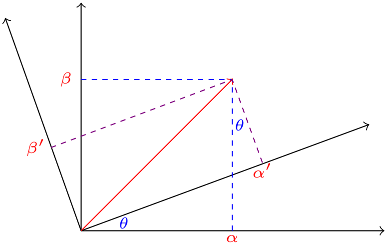
ISO(2)群的不可约表示续1

$$W(\theta,\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta)R(\theta)$$

$$S(\bar{\alpha},\bar{\beta})S(\alpha,\beta)=S(\bar{\alpha}+\alpha,\bar{\beta}+\beta)\qquad R(\bar{\theta})R(\theta)=R(\bar{\theta}+\theta)$$

$$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta)=S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta,-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)$$

W是由对二维矢量平移一个矢量(α,β)及对其转动(转角θ)的组合



$$\frac{\alpha}{\cos\theta}+\beta'\tan\theta=\alpha'\qquad \alpha\tan\theta+\frac{\beta'}{\cos\theta}=\beta\quad\Rightarrow\quad \beta'=-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta$$

$$\alpha'=\frac{\alpha}{\cos\theta}+(\beta\cos\theta-\alpha\sin\theta)\tan\theta=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}\alpha+\beta\sin\theta=\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta$$

ISO(2)群的不可约表示续2

$$W(\theta,\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta)R(\theta)$$

$$S(\bar\alpha,\bar\beta)S(\alpha,\beta)=S(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta) \qquad R(\bar\theta)R(\theta)=R(\bar\theta+\theta)$$

$$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta)=S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta,-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)$$

W是由对二维矢量平移一个矢量(α,β)及对其转动(转角θ)的组合

对θ,α,β是无穷小的情形

$$W(\theta,\alpha,\beta)^\mu{}_\nu=g^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu \qquad \omega_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0&-\alpha&-\beta&0\\ \alpha&0&\theta&-\alpha\\ \beta&-\theta&0&-\beta\\ 0&\alpha&\beta&0\end{bmatrix}$$

我们可以将态空间的变换算符$U(W)$按θ,α,β进行展开

$$U(W(\theta,\alpha,\beta))=1+i\alpha A+i\beta B+i\theta J^3 \qquad A=J^2+K_1 \qquad B=-J^1+K_2$$

厄米算符! 物理含义?

$$U(R(\theta))[1+i\alpha A+i\beta B]U(R^{-1}(\theta))=U(R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta))$$

$$=U(S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta,-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta))=1+i(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)A+i(-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)B$$

$$U[R(\theta)]AU^{-1}[R(\theta)]=A\cos\theta-B\sin\theta \qquad U[R(\theta)]BU^{-1}[R(\theta)]=A\sin\theta+B\cos\theta$$

ISO(2)群的不可约表示续3

$W(\theta,\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta)R(\theta)$

$$S(\bar\alpha,\bar\beta)S(\alpha,\beta)=S(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta)\qquad R(\bar\theta)R(\theta)=R(\bar\theta+\theta)$$

$$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta)=S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta,-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)$$

W是由对二维矢量平移一个矢量(α,β)及对其转动(转角θ)的组合

对θ,α,β是无穷小的情形

$$W(\theta,\alpha,\beta)^{\mu}{}_{\nu}=g^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}\qquad \omega_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0&-\alpha&-\beta&0\\ \alpha&0&\theta&-\alpha\\ \beta&-\theta&0&-\beta\\ 0&\alpha&\beta&0\end{bmatrix}$$

我们可以将态空间的变换算符$U(W)$按θ,α,β进行展开

$$U(W(\theta,\alpha,\beta))=1+i\alpha A+i\beta B+i\theta J^3\qquad A=J^2+K_1\qquad B=-J^1+K_2$$

$$U[R(\theta)]AU^{-1}[R(\theta)]=A\cos\theta-B\sin\theta\qquad U[R(\theta)]BU^{-1}[R(\theta)]=A\sin\theta+B\cos\theta$$

$$[J^3,A]=iB\qquad [J^3,B]=-iA\qquad [A,B]=0\qquad \Rightarrow\quad [J^3,\ A^2+B^2]=0$$

$$[P^i,A]=\delta_{i1}i(P^3-H)-i\delta_{i3}P^1\qquad [P^i,B]=\delta_{i2}i(P^3-H)-\delta_{i3}P^2$$

$\vec P,A,B$对参考动量态相互对易,选它们的共同本征态 $A\Psi_{k,a,b}=a\Psi_{k,a,b}$ $B\Psi_{k,a,b}=b\Psi_{k,a,b}$

则对态$\Psi^{\theta}_{k,a,b}\equiv U^{-1}[R(\theta)]\Psi_{k,a,b}$,

$$A\Psi^{\theta}_{k,a,b}=(a\cos\theta-b\sin\theta)\Psi^{\theta}_{k,a,b}\qquad B\Psi^{\theta}_{k,a,b}=(a\sin\theta+b\cos\theta)\Psi^{\theta}_{k,a,b}$$

ISO(2)群的不可约表示续4 $W(\theta,\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta)R(\theta)$

$$S(\bar\alpha,\bar\beta)S(\alpha,\beta)=S(\bar\alpha+\alpha,\bar\beta+\beta) \qquad R(\bar\theta)R(\theta)=R(\bar\theta+\theta)$$

$$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta)=S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta,-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)$$

W是对二维矢量平移一个矢量(α,β)及对此矢量作转动(转角θ)的组合

对θ,α,β是无穷小的情形可将态空间的变换算符$U(W)$按θ,α,β进行展开

$$U(W(\theta,\alpha,\beta))=1+i\alpha A+i\beta B+i\theta J^3 \qquad A=J^2+K_1 \qquad B=-J^1+K_2$$ 厄米算符!

选A,B的共同本征态$\Psi_{k,a,b}$. $A\Psi^\theta_{k,a,b}=(a\cos\theta-b\sin\theta)\Psi^\theta_{k,a,b}$ $B\Psi^\theta_{k,a,b}=(a\sin\theta+b\cos\theta)\Psi^\theta_{k,a,b}$

物理上没有看到无质量的粒子具有这样一个用θ描述的连续自由度,

只可能$a=b=0$ $A\Psi_{k,a,b}=B\Psi_{k,a,b}=0$, 进一步选这些态为$J^3$的本征态$\Psi_{k,\sigma}$

$$J^3\Psi_{k,\sigma}=\sigma\Psi_{k,\sigma} \qquad A\Psi_{k,\sigma}=0 \qquad B\Psi_{k,\sigma}=0$$

动量$\vec k$现在沿z轴方向,σ给出的是角动量沿运动方向的投影,称之为螺旋度.

对θ,α,β有限大的情形: $U[S(\alpha,\beta)]=e^{i\alpha A+i\beta B}$ $U[R(\theta)]=e^{i\theta J^3}$

$$U(W)\Psi_{k,\sigma}=e^{i\alpha A+i\beta B}e^{i\theta J^3}\Psi_{k,\sigma}=e^{i\theta\sigma}\Psi_{k,\sigma} \quad\Rightarrow\quad D_{\sigma'\sigma}(W)=e^{i\theta\sigma}\delta_{\sigma'\sigma}$$

小群是洛伦兹变换前后的动量之间的空间转动 $L(p) = R(\hat{p})B(\frac{|\vec{p}|}{\kappa})$

$$B(u)=\begin{pmatrix} (u^2+1)/2u & 0 & 0 & (u^2-1)/2u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (u^2-1)/2u & 0 & 0 & (u^2+1)/2u \end{pmatrix} \qquad B^{-1}(u)=\begin{pmatrix} (u^2+1)/2u & 0 & 0 & -(u^2-1)/2u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(u^2-1)/2u & 0 & 0 & (u^2+1)/2u \end{pmatrix}$$

沿z轴的p和Λ: 若u_0, u_1, u_2分别是三个沿z轴推进对应的u,且u_1是连接u_0, u_2的推进

$$p \equiv B(u_0)k \qquad \Lambda p \equiv B(u_2)k$$

$$\begin{pmatrix} (u_1^2+1)/2u_1 & 0 & 0 & (u_1^2-1)/2u_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (u_1^2-1)/2u_1 & 0 & 0 & (u_1^2+1)/2u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \kappa u_0 \\ 0 \\ 0 \\ \kappa u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa u_2 \\ 0 \\ 0 \\ \kappa u_2 \end{pmatrix}$$

则: $u_2 = u_0 u_1 \;\Rightarrow\; B(u_1)B(u_0) = B(u_2)$ 沿动量方向取为z方向的推进变换导致的小群:

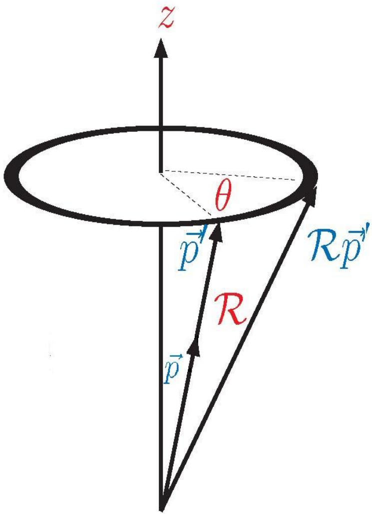
$$L(p)\|_{\vec{p}\|\vec{e}_z} = B(u_0) \qquad L(\Lambda p)\|_{\vec{p}\|\vec{e}_z} = B(u_2) \qquad \Lambda \equiv B(u_1) \qquad W(\Lambda,p)\|_{\vec{p}\|\vec{e}_z} = B(u_2)^{-1}B(u_1)B(u_0) = 1$$

一般p和Λ: 用沿$\vec{p}$方向推进B把p放为Λp,再用纯转动$\mathcal{R}$转到Λp方向:$\Lambda = \mathcal{R}B,\ p' \equiv Bp$

$$W(\Lambda,p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = L^{-1}(\mathcal{R}Bp)\mathcal{R}L(Bp)L^{-1}(Bp)BL(p) = W(\mathcal{R},Bp)W(B,p) = W(\mathcal{R},Bp)$$

$$= W(\mathcal{R},p') = L^{-1}(\mathcal{R}p')\mathcal{R}L(p') = B^{-1}(|\vec{p}'|/\kappa)R^{-1}(\mathcal{R}\hat{p}')\mathcal{R}R(\hat{p}')B(|\vec{p}'|/\kappa) = R(\theta)$$

时空转动



无质量的正能单粒子态的Casimir算符:

$$W^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu J_{\rho\sigma} \quad W^\mu W_\mu \Psi_{p,\sigma} = N(p)U(L(p))W^\mu W_\mu \Psi_{k,\sigma} \quad P^\mu P_\mu \Psi_{p,\sigma} = 0$$

$$\begin{aligned}
W^\mu W_\mu \Psi_{k,\sigma} &= W^\mu \frac{\kappa}{2}(\epsilon_\mu{}^{0\rho\sigma}+\epsilon_\mu{}^{3\rho\sigma})J_{\rho\sigma}\Psi_{k,\sigma} = \frac{\kappa^2}{4}(\epsilon^{\mu 0\rho'\sigma'}+\epsilon^{\mu 3\rho'\sigma'})(\epsilon_\mu{}^{0\rho\sigma}+\epsilon_\mu{}^{3\rho\sigma})J_{\rho'\sigma'}J_{\rho\sigma}\Psi_{k,\sigma} \\
&= \frac{\kappa^2}{4}(\epsilon^{\mu 0\rho'\sigma'}\epsilon_\mu{}^{0\rho\sigma}+\epsilon^{\mu 3\rho'\sigma'}\epsilon_\mu{}^{3\rho\sigma}+\epsilon^{\mu 0\rho'\sigma'}\epsilon_\mu{}^{3\rho\sigma}+\epsilon^{\mu 3\rho'\sigma'}\epsilon_\mu{}^{0\rho\sigma})J_{\rho'\sigma'}J_{\rho\sigma}\Psi_{k,\sigma} \\
&= \frac{\kappa^2}{4}(-\epsilon^{k0\rho'\sigma'}\epsilon^{k0\rho\sigma}+\epsilon^{03\rho'\sigma'}\epsilon^{03\rho\sigma}-\epsilon^{k3\rho'\sigma'}\epsilon^{k3\rho\sigma}-\epsilon^{k0\rho'\sigma'}\epsilon^{k3\rho\sigma}-\epsilon^{k3\rho'\sigma'}\epsilon^{k0\rho\sigma})J_{\rho'\sigma'}J_{\rho\sigma}\Psi_{k,\sigma} \\
&= \frac{\kappa^2}{4}(-2J_{ij}J_{ij}+2J_{ab}J_{ab}-4J_{0a}J_{0a}-4J_{23}J_{02}-4J_{13}J_{01}-4J_{02}J_{23}-4J_{01}J_{13})\Psi_{k,\sigma} \\
&= -\kappa^2(J_{a3}J_{a3}+J_{0a}J_{0a}+J_{23}J_{02}+J_{13}J_{01}+J_{02}J_{23}+J_{01}J_{13})\Psi_{k,\sigma} \\
&= -\kappa^2[(J_{13}+J_{01})^2+(J_{23}+J_{02})^2]\Psi_{k,\sigma} = -\kappa^2[(J^2-K^1)^2+(-J^1-K^2)^2]\Psi_{k,\sigma} \\
&= -\kappa^2(A^2+B^2)\Psi_{k,\sigma} = -\kappa^2(a^2+b^2)\Psi_{k,\sigma} = 0
\end{aligned}$$

$$P_\mu W^\mu = 0 \Rightarrow W^3\Psi_{k,\sigma} = W^0\Psi_{k,\sigma} = \epsilon^{0312}P_3J_{12}\Psi_{k,\sigma} = P^3J^3\Psi_{k,\sigma} = \kappa\sigma\Psi_{k,\sigma} \quad W^\mu W_\mu\Psi_{p,\sigma} = -\kappa^2(a^2+b^2)\Psi_{p,\sigma} = 0$$

无质量正能单粒子态的螺旋度(Helicity)算符: $\vec{P}\cdot\vec{J}/P^0$

守恒量; $\vec{J}$的垂直分量(轨道部分?)无贡献

$$W^\mu P_\mu = 0 \ \Rightarrow \ W^0 = \vec{W}\cdot\vec{P}/P^0 \qquad [P^\mu, W^\rho] = 0$$

$$\vec{W}_\perp \equiv \vec{W} - \vec{W}\cdot\frac{\vec{P}}{P^0}\frac{\vec{P}}{P^0} \ \Rightarrow \ \vec{P}\cdot\vec{W}_\perp = 0 \ \Rightarrow \ \vec{W}_\perp\cdot\vec{W}_\perp = \vec{W}\cdot\vec{W}_\perp$$

$$W^2\Psi = 0 \ \Rightarrow \ \vec{W}_\perp\cdot\vec{W}_\perp\Psi = \vec{W}\cdot\vec{W}_\perp\Psi = [\vec{W}\cdot\vec{W} - (\vec{W}\cdot\vec{P}/P^0)^2]\Psi = -W^2\Psi = 0 \ \Rightarrow \ \vec{W}_\perp\Psi = 0$$

$$\vec{W}\Psi = (\vec{W}_\perp + \vec{W}\cdot\frac{\vec{P}}{P^0}\frac{\vec{P}}{P^0})\Psi = \frac{W^0}{P^0}\vec{P}\Psi$$

$$W^0 = \vec{P}\cdot\vec{J} \ \Rightarrow \ W^\mu\Psi = (W^0, \vec{W})\Psi = (W^0, \frac{W^0}{P^0}\vec{P})\Psi = \frac{W^0}{P^0}P^\mu\Psi = \frac{\vec{P}\cdot\vec{J}}{P^0}P^\mu\Psi$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu\frac{\vec{P}\cdot\vec{J}}{P^0}P^\nu\Psi = \Lambda^\mu{}_\nu W^\nu\Psi = W^{\mu\prime}\Psi \Leftarrow \frac{\vec{P}'\cdot\vec{J}'}{P'^0}P'^\mu\Psi = \frac{\vec{P}'\cdot\vec{J}'}{P'^0}\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu\Psi \ \Rightarrow \ \frac{\vec{P}'\cdot\vec{J}'}{P'^0}\Psi = \frac{\vec{P}\cdot\vec{J}}{P^0}\Psi$$

对无质量的正能单粒子态,螺旋度算符是洛伦兹变换下不变的! 有质量不行:沿动量方向推进

$$\frac{\vec{P}\cdot\vec{J}}{P^0}\Psi_{k,\sigma} = J^3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}$$

只有σ能标记无质量单粒子态!

$$\Rightarrow \ \frac{\vec{P}\cdot\vec{J}}{P^0}\Psi_{p,\sigma} = \frac{\vec{P}\cdot\vec{J}}{P^0}NU(L)\Psi_{k,\sigma} = NU(L)U^{-1}(L)\frac{\vec{P}\cdot\vec{J}}{P^0}U(L)\Psi_{k,\sigma} = NU(L)\frac{\vec{P}'\cdot\vec{J}'}{P'^0}\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{p,\sigma}$$

非奇次洛伦兹变换的拓扑性质 $R_4 \times R_3 \times S_3/Z_2$

非奇次洛伦兹变换与$SL(2,C)/Z_2$的等价性

对四矢量V^μ的$SL(2,C)$变换: $V^\mu\sigma_\mu = \begin{pmatrix} V^0+V^3 & V^1-iV^2 \\ V^1+iV^2 & V^0-V^3 \end{pmatrix} \equiv v = v^\dagger \to \lambda v \lambda^\dagger$

$$\mathrm{Det}v = (V^0)^2-(V^1)^2-(V^2)^2-(V^3)^2 = V_\mu V^\mu \qquad \lambda:\ 2\times 2_{\text{complex with}}\ \mathrm{Det}\lambda = 1$$

对四矢量V^μ的奇次洛伦兹变换: $V^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \quad \lambda V^\mu\sigma_\mu\lambda^\dagger = \Lambda^\mu{}_\nu(\lambda)V^\nu\sigma_\mu$ $SL(2,C)$对称性

$$(\lambda\bar\lambda)V^\mu\sigma_\mu(\lambda\bar\lambda)^\dagger = \lambda(\bar\lambda V^\mu\sigma_\mu\bar\lambda^\dagger)\lambda^\dagger = \lambda\Lambda^\mu{}_\nu(\bar\lambda)V^\nu\sigma_\mu\lambda^\dagger = \Lambda^\mu{}_\rho(\lambda)\Lambda^\rho{}_\nu(\bar\lambda)V^\nu\sigma_\mu$$

$$\Lambda(\lambda\bar\lambda) = \Lambda(\lambda)\Lambda(\bar\lambda) \qquad \Lambda(-\lambda) = \Lambda(\lambda)$$ Z_2对称性

拓扑性质: $\lambda = ue^h \quad uu^\dagger = 1 \quad h = h^\dagger \quad \mathrm{Det}u = 1 \quad \mathrm{Tr}h=0 \quad \mathrm{Tr}(uvu^\dagger) = \mathrm{Tr}v = 2V^0$ u场代表纯转动

$$\mathrm{Det}u = 1 \qquad u = \begin{pmatrix} d+ie & f+ig \\ -f+ig & d-ie \end{pmatrix}$$ $SU(2)$ $$d^2+e^2+f^2+g^2 = 1$$ 转动拓扑: S_3

$$\mathrm{Tr}h = 0 \qquad h = \begin{pmatrix} c & a-ib \\ a+ib & -c \end{pmatrix}$$ a,b,c任意 h对应的拓扑: R_3 另外有 平移拓扑: R_4

非奇次洛伦兹变换的拓扑性质 $R_4 \times R_3 \times S_3/Z_2$

非奇次洛伦兹变换的双连通性

- R_4、R_3都是单联通的
- S_3/Z_2是双联通的: 含与不含$u \to -u$的分成两类
- 例: $\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$对应绕第三轴转$\theta$角的转动

$-\lambda(\theta) = \lambda(\theta + 2\pi)$ $\lambda(\theta) = \lambda(\theta + 4\pi)$

双联通⇒任一走同一路径两遍的双圈可以被连续缩为一点

一个圈: $1 \Rightarrow \Lambda \Rightarrow \bar{\Lambda}\Lambda \Rightarrow 1$ $U^{-1}(\bar{\Lambda}\Lambda)U(\bar{\Lambda})U(\Lambda)$ 注意$U(\bar{\Lambda}\Lambda)$不一定等于$U(\bar{\Lambda})U(\Lambda)$

双圈可以被连续缩为一点: $[U^{-1}(\bar{\Lambda}\Lambda)U(\bar{\Lambda})U(\Lambda)]^2 = 1$ $U(\bar{\Lambda})U(\Lambda) = \pm U(\bar{\Lambda}\Lambda)$

第三轴转4π角的洛伦兹转动等于单位元

对角动量第三分量本征值为σ的态: $e^{4\pi i\sigma} = 1 \Rightarrow$ σ只能取整数和半整数!

有质量的正能单粒子态与无质量的正能单粒子态的差别

♣ 有质量的正能单粒子态有$2j+1$个态

♢ 无质量的正能单粒子态最多有2个态考虑空间反射

♡ 对自旋为0和1/2的态,有无质量的单粒子态的数目是一样的

♠ 对自旋≥ 1的态,有无质量的单粒子态的数目是不一样的!

¶ 从有质量的零质量极限看自旋≥ 1的无质量态,极限存在需理论使多余的自由度观测不到!

✠ 由此，对自旋≥ 1的无质量态,理论要求存在规范对称性!

$\Re$ 反过来，对自旋≥ 1态的理论, 若零质量极限存在，理论规范对称性的破坏必须与质量相关, 而与其它类型的相互作用无关!

$\Im$ 旁证： 幺正性要求矢量场理论的三、四点作用必须是规范作用!

空间反射

$P \equiv U(\mathcal{P}, 0)$

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

不可以连续变形到单位变换的变换,需要判断它是幺正算符,还是反幺正算符

$$PU(\Lambda, a)P^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a) \qquad T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$$

取$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ 和$a^\mu = \epsilon^\mu$,准到ω和ϵ一阶 $U(1+\omega, \epsilon) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\rho P^\rho + \cdots$

$$PiJ^{\rho\sigma}P^{-1} = i\mathcal{P}_\mu{}^\rho\mathcal{P}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu} \qquad PiP^\rho P^{-1} = i\mathcal{P}_\mu{}^\rho P^\mu$$

由于还不能确定P是幺正算符,还是反幺正算符,暂把虚数i保留在了P和P^{-1}算符的中间. 在上式中对四动量的零分量有 $PiHP^{-1} = iH$

如果P是反幺正算符将导致$PHP^{-1} = -H$.它意味如果假设物理体系具有空间反射对称性, 则对应能量为E每一个正能态都应有相应的负能态$-E$在物理谱中出现, 实验上并没有发现负能态, 因此要求P是反幺正算符是不对的.

应取P为幺正算符.

$$P\vec{J}P^{-1} = \vec{J} \qquad P\vec{K}P^{-1} = -\vec{K} \qquad P\vec{P}P^{-1} = -\vec{P} \qquad PHP^{-1} = H$$

有质量的正能单粒子态的空间反射变换

参考动量$k^\mu = (M,0,0,0)$的单粒子态$\Psi_{k,\sigma}$,用其能动量和J^3的本征值标志态

$$H\Psi_{k,\sigma} = M\Psi_{k,\sigma} \qquad \vec{P}\Psi_{k,\sigma} = 0 \qquad J^3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}$$

空间反射态$P\Psi_{k,\sigma}$的能动量和角动量的z分量的本征值满足

$$HP\Psi_{k,\sigma} = MP\Psi_{k,\sigma} \qquad \vec{P}P\Psi_{k,\sigma} = 0 \qquad J^3P\Psi_{k,\sigma} = \sigma P\Psi_{k,\sigma}$$

空间反射态$P\Psi_{k,\sigma}$的能动量和角动量的z分量的本征值与原来态的本征值完全一样. 空间反射态$P\Psi_{k,\sigma}$与原来的态$\Psi_{k,\sigma}$只能相差一个相角$P\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma\Psi_{k,\sigma}$.

$$(J^1 \pm iJ^2)\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,\sigma\pm1} \quad \mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1} = L(\mathcal{P}p) \quad \mathcal{P}p = (\sqrt{\vec{p}^2+M^2}, -\vec{p})$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\eta_\sigma\Psi_{k,\sigma\pm1} &= (J^1 \pm iJ^2)P\Psi_{k,\sigma} = P(J^1 \pm iJ^2)\Psi_{k,\sigma}\\ &= \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}P\Psi_{k,\sigma\pm1} = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\eta_{\sigma\pm1}\Psi_{k,\sigma\pm1}\end{aligned}$$

$\eta_\sigma = \eta_{\sigma\pm1} \quad \Rightarrow \quad \eta_\sigma$实际上与$\sigma$无关 $\qquad P\Psi_{k,\sigma} = \eta\Psi_{k,\sigma}$

$$\begin{aligned}P\Psi_{p,\sigma} &\equiv \sqrt{M/p^0}PU(L(p))\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{M/p^0}U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1})P\Psi_{k,\sigma}\\ &= \sqrt{M/p^0}U(L(\mathcal{P}p))\eta\Psi_{k,\sigma} = \eta\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}\end{aligned}$$

无质量的正能单粒子态的空间反射变换

参考动量$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$在空间反射变换下变为$(\mathcal{P}k)^\mu=(\kappa,0,0,-\kappa)$. 考虑以y轴为轴转$-180°$的转动变换$R_2$，它同样使$k$变为$\mathcal{P}k$。但$R_2$变换使$J^3$变号，

$$U(R_2)J^3U^{-1}(R_2)=-J^3 \qquad U(R_2)=e^{-i\pi J^2}$$

因此R_2和P的联合变换保持参考动量$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$不变，但使$J^3$变号。由$P\vec{J}P^{-1}=\vec{J}$, $P\vec{K}P^{-1}=-\vec{K}$, $P\vec{P}P^{-1}=-\vec{P}$, $PHP^{-1}=H$, 对$\Psi_{k,\sigma}$ 的空间反射和R_2联合变换态$U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}$的能动量和角动量的z分量的本征值满足

$$HU(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}=\kappa U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma} \qquad \vec{P}U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}=\vec{k}U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}$$

$$J^3U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}=-\sigma U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}$$

空间反射和R_2联合变换态$U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}$的能量和动量本征值与原来态的本征值完全一样,但角动量的z分量的本征值反号. 因此,空间反射和R_2联合变换态$U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}$ 与态$\Psi_{k,-\sigma}$只能相差一个相角$U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}=\eta_\sigma\Psi_{k,-\sigma}$

应用它到$\Psi_{p,\sigma}\equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k,\sigma}$, 结合$L(p)=R(\hat{p})B(\frac{|\vec{p}|}{\kappa})$

$$\begin{aligned}P\Psi_{p,\sigma}&=\sqrt{\kappa/p^0}PU(R(\hat{p})B(|\vec{p}|/\kappa))\Psi_{k,\sigma}=\sqrt{\kappa/p^0}U(\mathcal{P}R(\hat{p})B(|\vec{p}|/\kappa)\mathcal{P}^{-1}R_2)U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}\\&=\eta_\sigma\sqrt{\kappa/p^0}U(R(\hat{p})R_2B(|\vec{p}|/\kappa))\Psi_{k,-\sigma}\end{aligned}$$

$\mathcal{P}^{-1}R_2$和$B(|\vec{p}|/\kappa)$对易,$\mathcal{P}$和$R(\hat{p})$对易

空间反射

无质量的正能单粒子态的空间反射变换

$$U(R(\hat{p})) = e^{-i\phi J_3} e^{-i\theta J_2}$$

$$U(R(-\hat{p})) = e^{-i(\phi\pm\pi)J_3} e^{-i(\pi-\theta)J_2} \qquad \begin{cases} \phi+\pi & 0 \le \phi < \pi \\ \phi-\pi & \pi \le \phi < 2\pi \end{cases}$$

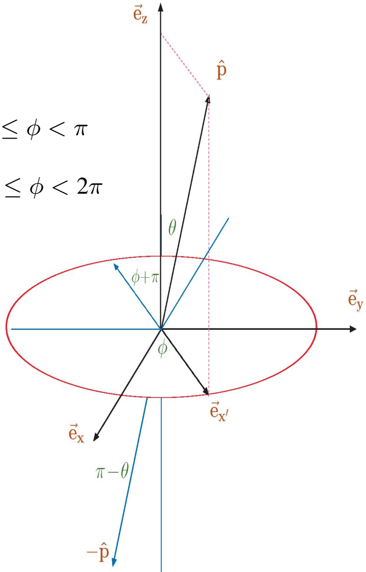
$$U^{-1}(R(-\hat{p}))U(R(\hat{p})R_2)$$

$$= e^{i(\pi-\theta)J_2} e^{i(\phi\pm\pi)J_3} e^{-i\phi J_3} e^{-i\theta J_2} e^{i\pi J_2}$$

$$= e^{i(\pi-\theta)J_2} e^{\pm i\pi J_3} e^{i(\pi-\theta)J_2} = e^{\pm i\pi J_3}$$

$$e^{\pm i\pi J_3} J_2 e^{\mp i\pi J_3} = -J_2$$

$$U(R(\hat{p})R_2) = U(R(-\hat{p}))e^{\pm i\pi J_3}$$



无质量的正能单粒子态的空间反射变换

参考动量$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$在空间反射变换下变为$(\mathcal{P}k)^\mu=(\kappa,0,0,-\kappa)$. 考虑以y轴为轴转$-180^\circ$的转动变换$R_2$，它同样使$k$变为$\mathcal{P}k$。但$R_2$变换使$J^3$变号，

$$U(R_2)J^3U^{-1}(R_2)=-J^3 \qquad U(R_2)=e^{-i\pi J^2}$$

因此R_2和P的联合变换保持参考动量$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$不变，但使$J^3$变号。
由$P\vec{J}P^{-1}=\vec{J}$, $P\vec{K}P^{-1}=-\vec{K}$, $P\vec{P}P^{-1}=-\vec{P}$, $PHP^{-1}=H$, 对参考动量$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$的单粒子态$\Psi_{k,\sigma}$ 的空间反射和R_2联合变换态$U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}$的能动量和角动量的z分量的本征值满足

$$HU(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}=\kappa U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma} \qquad \vec{P}U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}=\vec{k}U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}$$

$$J^3U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}=-\sigma U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma} \qquad P\Psi_{p,\sigma}=\eta_\sigma\sqrt{\kappa/p^0}\,U\left(R(\hat{p})R_2B(|\vec{p}|/\kappa)\right)\Psi_{k,-\sigma}$$

$$U(R(\hat{p})R_2)=U(R(-\hat{p}))e^{\pm i\pi J^3}$$

正号对应$\hat{p}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$中的$0\le\phi<\pi$,负号对应$\pi\le\phi<2\pi$.

$e^{\pm i\pi J^3}$是绕z轴转180°的变换,与$B(|\vec{p}|/\kappa)$对易: $\underline{P\Psi_{p,\sigma}=\eta_\sigma e^{\mp i\pi\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}}$
指数上的负号对应$0\le\phi<\pi$,正号对应$\pi\le\phi<2\pi$.

时间反演

$T \equiv U(\mathcal{T}, 0)$

$$\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

不可以连续变形到单位变换的变换,需要判断它是幺正算符,还是反幺正算符

$$TU(\Lambda, a)T^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a)$$

在上式中进一步取$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$ 和$a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$,准到ω和ϵ的一阶

$$TiJ^{\rho\sigma}T^{-1} = i\mathcal{T}_{\mu}{}^{\rho}\mathcal{T}_{\nu}{}^{\sigma}J^{\mu\nu} \qquad TiP^{\rho}T^{-1} = i\mathcal{T}_{\mu}{}^{\rho}P^{\mu}$$

在上式中对四动量的零分量有 $TiHT^{-1} = -iH$

如果T是幺正算符将导致$THT^{-1} = -H$.它意味如果假设体系具有时间反演对称性, 对应能量为E每一个正能态都应有相应的负能态$-E$在物理谱中出现, 实验上并没有发现负能态, 要求T是幺正算符不对,应该取T为反幺正算符

$$T\vec{J}T^{-1} = -\vec{J} \qquad T\vec{K}T^{-1} = \vec{K} \qquad T\vec{P}T^{-1} = -\vec{P} \qquad THT^{-1} = H$$

有质量的正能单粒子态的时间反演变换

对参考动量$k^\mu = (M,0,0,0)$的单粒子态$\Psi_{k,\sigma}$,用其能动量和J^3的本征值标志态

$$H\Psi_{k,\sigma} = M\Psi_{k,\sigma} \qquad \vec{P}\Psi_{k,\sigma} = 0 \qquad J^3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}$$

时间反演态$T\Psi_{k,\sigma}$的能动量和角动量的z分量的本征值满足

$$HT\Psi_{k,\sigma} = MT\Psi_{k,\sigma} \qquad \vec{P}T\Psi_{k,\sigma} = 0 \qquad J^3T\Psi_{k,\sigma} = -\sigma T\Psi_{k,\sigma}$$

$T\Psi_{k,\sigma}$的能动量本征值与原态本征值完全一样,角动量z分量的本征值相差一负号. 时间反演态$T\Psi_{k,\sigma}$ 与态$\Psi_{k,-\sigma}$只能相差一个相角$T\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma\Psi_{k,-\sigma}$.

$$(J^1 \pm iJ^2)\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,\sigma\pm1} \qquad \mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1} = L(\mathcal{P}p)$$

$$\zeta_\sigma\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,-\sigma\mp1} = (J^1 \mp iJ^2)\zeta_\sigma\Psi_{k,-\sigma} = (J^1 \mp iJ^2)T\Psi_{k,\sigma} = -T(J^1 \pm iJ^2)\Psi_{k,\sigma}$$
$$= -T\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,\sigma\pm1} = -\zeta_{\sigma\pm1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{k,-\sigma\mp1}$$

$$\zeta_\sigma = -\zeta_{\sigma\pm1} \quad \Rightarrow \quad \zeta_\sigma = (-1)^{j-\sigma}\zeta$$

ζ是与σ无关的相角, 引入$(-1)^j$目的是保证指数上的因子即使在σ取值为半整数时仍为整数因而保证因子$(-1)^{j-\sigma}$总为实数. $T\Psi_{k,\sigma} = \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma} \Rightarrow \Psi_{k,\sigma} \to \Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{1/2}\Psi_{k,\sigma}$

有质量的正能单粒子态的时间反演变换

对参考动量$k^\mu=(M,0,0,0)$的单粒子态$\Psi_{k,\sigma}$,用其能动量和J^3的本征值标志态

$$H\Psi_{k,\sigma}=M\Psi_{k,\sigma}\qquad \vec{P}\Psi_{k,\sigma}=0\qquad J^3\Psi_{k,\sigma}=\sigma\Psi_{k,\sigma}$$

时间反演态$T\Psi_{k,\sigma}$的能动量和角动量的z分量的本征值满足

$$HT\Psi_{k,\sigma}=MT\Psi_{k,\sigma}\qquad \vec{P}T\Psi_{k,\sigma}=0\qquad J^3T\Psi_{k,\sigma}=-\sigma T\Psi_{k,\sigma}$$

$T\Psi_{k,\sigma}$的能动量本征值与原态的本征值完全一样,J^3的本征值相差一负号. 时间反演态$T\Psi_{k,\sigma}$ 与态$\Psi_{k,-\sigma}$只能相差一个相角$T\Psi_{k,\sigma}=\zeta_\sigma\Psi_{k,-\sigma}$

$$T\Psi_{k,\sigma}=\zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma}\Rightarrow\Psi_{k,\sigma}\to\Psi'_{k,\sigma}=\zeta^{1/2}\Psi_{k,\sigma}$$

$$T\Psi'_{k,\sigma}=\zeta^{*1/2}T\Psi_{k,\sigma}=\zeta^{*1/2}\zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma}=(-1)^{j-\sigma}\Psi'_{k,-\sigma}$$

$$\begin{aligned}T\Psi_{p,\sigma}&\equiv\sqrt{M/p^0}TU(L(p))\Psi_{k,\sigma}=\sqrt{M/p^0}U(\mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1})T\Psi_{k,\sigma}\\&=\sqrt{M/p^0}U(L(\mathcal{P}p))(-1)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma}=(-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}\end{aligned}$$

无质量的正能单粒子态的时间反演变换

因$HT\Psi_{k,\sigma}=\kappa T\Psi_{k,\sigma}$, $P^3T\Psi_{k,\sigma}=-\kappa T\Psi_{k,\sigma}$, $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$在时间反演变换下变为$(\mathcal{P}k)^\mu=(\kappa,0,0,-\kappa)$,$J^3$在时间反演变换下变号.以y轴为轴转$-180^\circ$的转动变换$R_2$同样使$J^3$变号. R_2和T的联合变换保持$k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$和$J_3$都不变。
对$\Psi_{k,\sigma}$ 的时间反演和R_2联合变换态$U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}$的各本征值满足

$$HU(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}=\kappa U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma} \qquad \vec{P}U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}=\vec{k}U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}$$

$$J^3U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}=\sigma U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}$$

$U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}$的能动量和$J^3$的本征值与原态完全一样. 空间反射和$R_2$联合变换态$U(R_2^{-1})P\Psi_{k,\sigma}$ 与原态$\Psi_{k,\sigma}$只能相差一个相角$U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}=\zeta_\sigma\Psi_{k,\sigma}$

$$\begin{aligned}T\Psi_{p,\sigma}&=\sqrt{\kappa/p^0}TU(R(\hat{p})B(|\vec{p}|/\kappa))\Psi_{k,\sigma}=\sqrt{\kappa/p^0}U(\mathcal{T}R(\hat{p})B(|\vec{p}|/\kappa)\mathcal{T}^{-1}R_2)U(R_2^{-1})T\Psi_{k,\sigma}\\&=\zeta_\sigma\sqrt{\kappa/p^0}U(R(\hat{p})R_2B(|\vec{p}|/\kappa))\Psi_{k,\sigma}=\zeta_\sigma e^{\pm i\pi\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}\end{aligned}$$

$\mathcal{T}^{-1}R_2$和$B(|\vec{p}|/\kappa)$对易; $\mathcal{T}$和$R(\hat{p})$对易及$U(R(\hat{p})R_2)=U(R(-\hat{p}))e^{\pm i\pi J^3}$.
正号对应$\hat{p}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$中$0\leq\phi<\pi$,负号对应$\pi\leq\phi<2\pi$.

只讨论内部对称性为若干个相互独立的$U(1)$对称性构成的情况

这时它们的生成元Q_a都相互对易，由

$$P^\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu \Psi_{p,\sigma} \qquad Q_{\bar{a}} \Psi_{p,\sigma} = q_{\bar{a}} \Psi_{p,\sigma}$$

定义的单粒子态在这些相互独立的内部$U(1)$对称性变换下的变换为

$$U(T(\theta))\Psi_{p,\sigma} = e^{iq_a\theta^a}\Psi_{p,\sigma} \qquad [Q_a, Q_{a'}] = 0$$

- 非阿贝尔的内部对称性意味着出现相互作用?
- 对有相互作用的体系前面的所有讨论哪些可用? 哪些不可用 ?

量子力学与狭义相对论基本原理:

原理一： 物理状态用希尔伯特空间的态矢量描写. 相差一个复数因子的两个态矢量,描写同一物理状态.

原理二： 可观察物理量由厄米算符代表; 物理量测量所能取的值是相应算符的本征值.

原理三: 如果体系处于归一化的态Ψ(($(\Psi, \Psi) = 1$), 通过实验测量它位于一组正交归一态$\Psi_1, \Psi_2, \ldots$的第n个态上的几率为$|(\Psi, \Psi_n)|^2$.

原理四： 所有惯性参考系等价，物理规律在非齐次洛伦兹变换下保持不变.

原理五： 光速在惯性系中不变，时空间隔在非齐次洛伦兹变换下保持不变.

量子场论: 态 $\Rightarrow$ 对称变换生成元≡力学量 $\Rightarrow$ 力学量完备集本征态≡单粒子态 $\Rightarrow$ 力学量本征值≡单粒子态物理参数

- 一+四 $\Rightarrow$ 态可按非齐次洛伦兹变换的性质进行分类
- 三+四 $\Rightarrow$ 态的非齐次洛伦兹变换是幺正或反幺正的
- 二+四+五 $\Rightarrow$ 态可用非齐次洛伦兹变换的生成元的本征值标记

单粒子态按非齐次洛伦兹变换进行分类: 假设它们可以形成完备集!

哪些粒子是同一种粒子? 它们在不同参考系之间可相互转换

它们构成非齐次洛伦兹变换形成的Pöingaré群的 不可约表示!

不讨论的态: 负能态、 虚质量态、 真空态

假设不存在的态: 负能态、 零质量的连续态

连续变换:

$$U(\Lambda,a)\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}e^{ia\cdot(\Lambda p)}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \qquad P^2\Psi_{p,\sigma}=M^2\Psi_{p,\sigma}$$

$$D_{\sigma'\sigma}(W)=\begin{cases}\left(e^{\frac{i}{2}\Theta_{ik}(\Lambda,p)J^{(j)}_{ik}}\right)_{\sigma'\sigma} & \text{有质量正能态}(2j+1\text{个自由度}) \\ e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma}\delta_{\sigma'\sigma} & \text{无质量正能态}(2\text{个自由度})\ \text{需规范对称性}\end{cases}$$

$$W^2\Psi_{p,\sigma}=-M^2j(j+1)\Psi_{p,\sigma}$$

$$W^2\Psi_{p,\sigma}=0 \quad \frac{\vec{P}\cdot\vec{J}}{P^0}\Psi_{p,\sigma}=\sigma\Psi_{p,\sigma}$$

分立变换:

$$P\Psi_{p,\sigma}=\begin{cases}\eta\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} \\ \eta_\sigma e^{\mp i\pi\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}\end{cases} \qquad T\Psi_{p,\sigma}=\begin{cases}\zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} & \text{有质量正能态} \\ \zeta_\sigma e^{\pm i\pi\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} & \text{无质量正能态}\end{cases}$$

关于单粒子态的标记 $\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{k^0}{p^0}}U(L(p))\Psi_{k,\sigma}$

♣ $\Psi_{p,\sigma}$一般不是J_3的本征态！ σ因此也不是J_3的本征值！

¶ 对有质量态,$\Psi_{p,\sigma}$一般是不同J_3本征值态的线性叠加！

♢ 特别地对零质量态,且$L(p)=R_2$, $\Psi_{p,\sigma}$的J_3本征值为$-\sigma$！

♡ σ是$\Psi_{p,\sigma}$退回到参考动量系时J_3的本征值！

♠ 对零质量态, σ 是螺旋度算符的本征值！

♠ 对有质量态, $j(j+1)$ 是J^2的本征值！

关于Poincaré对称性的评述

♣ 完整的Poincaré对称性包含时空平移与转动、空间反射和时间反演

♠ 目前的讨论假设自然界具有Poincaré对称性！

♡ 但实验告诉我们： 自然界不具有分立的空间反射和时间反演对称性 ！

♢ 但确具有连续的时空平移和转动对称性 ！

✠ 为什么对完整Poincaré 对称性中的连续和分立对称性分别给与不平等待遇 ？